ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 13 August 1933 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Knickfestigkeit eines auf elastischen Zwischenstützen gelagerten Balkens.

Von *W. B. Klemperer* und *H. B. Gibbons* in Akron (Ohio) USA.

Die Knickung von Druckstäben, deren Spannweite durch Zwischenstützen unterbrochen wird, betrachtet man gewöhnlich so, als ob die Zwischenstützen selbst vollständig starr wären, d. h. keinerlei Ausweichung, sondern nur eine Neigung der Stabachse an der gestützten Stelle gestatteten. Der dabei zugrunde liegende Gedanke ist, daß unter einer Knicklast, die zwar die bloße Eulerlast der ganzen Spannweite bei Abwesenheit der Zwischenstützen überschreiten würde, nicht aber die Eulerlast des größten Intervalls, der Stab zunächst doch in einem Gleichgewichtszustande ist, wenn auch in einem unstabilen, so daß tatsächlich nur sehr geringe Rückführkräfte an den Zwischenstützpunkten nötig sind, um den Stab wirksam soweit zu stützen, bis schließlich bei weiterer Belastung Ausbiegung zwischen den Zwischenstützen eintritt.

Andererseits kann dies offenbar kein ganz richtiges Bild des wirklichen Vorganges sein. Wenn nämlich die Zwischenstützen sehr schwach sind, also ihre Steifigkeit als verschwindend klein angenommen wird, so muß die Anzahl und Verteilung dieser gedachten Stützen offensichtlich von verschwindendem Einfluß auf die Knickfestigkeit des Stabes sein.

Es entsteht nun die Frage: Wie steif muß eine Zwischenstütze sein, um die volle Festigkeit, die vom Knickgesetz bei starrer Stützung für das Intervall vorausgesagt wird, sicherzustellen? Wäre die Steifigkeit der Stützen geringer, welches würde dann die tatsächliche Festigkeit des Stabes sein, und welche Art von Ausknickung würde bei einer Belastung über diese Grenze hinaus erfolgen?

Um zu einem quantitativen Maße der Steifigkeit der Stützen zu gelangen, von welcher — abgesehen von Anzahl und Anordnung derselben — die tatsächliche Festigkeit des Stabes anzunehmenderweise abhinge, ersetzen wir in Gedanken diese Stützen durch ein System von gewöhnlichen Federn, welche bei gerader Stabachse spannungslos sein sollen. Diese Federung ist linear-elastisch zu denken, d. h. derart, daß sie auf eine Ausweichung der Stabachse mit einer rückführenden Kraft reagiert, welche rechtwinklig zur Stabachse und proportional der Ausweichung wäre. Der Proportionalitätsfaktor, d. h. die rückführende Kraft pro Einheit der Ausweichung werde als „absolute" Steifigkeit (S) bezeichnet. Wenn die Ausweichung (y) an zwei Stellen etwa nach verschiedenen Seiten erfolgt, so werden die Rückführkräfte daselbst ($S\,y$) entgegengesetzte Vorzeichen haben, wegen der verschiedenen Vorzeichen von (y); aber

(S) bleibt immer positiv. (Negatives (S) würde einem gedachten Mechanismus entsprechen, der die Knickstabilität verringerte, anstatt sie zu vergrößern.)

Diese Darstellung der Stützensteifigkeit gestattet die Berechnung des Stabgleichgewichts für eine unendlich kleine Ausbiegung und, nach Kürzung der Ausweichung (y) in allen Ausdrücken gleicher Größenordnung, die Verfestigung des Stabes als Eulerknickfestigkeit einer äquivalenten, reduzierten Spannweite, die nur von der Anordnung und relativen Steifigkeit der Zwischenstützen abhängt. Jeder Versuch, die Last über diese Grenze hinaus zu steigern, würde die Ausknickung des Stabes nach sich ziehen, wobei einige oder alle Stützen nachgeben würden.

Die im folgenden dargestellte Theorie nimmt die Enden des Stabes ebenso wie die Befestigung der Stützen als in Schneiden gelagert an. Jedoch kann die Theorie leicht auf verschiedene Grade von Einspannung ausgedehnt werden.

Wir wollen auch gleichen Abstand der Stützen voneinander annehmen. Irgendeine unsymmetrische Anordnung kann nach einer verwandten Methode behandelt werden, führt aber notwendigermaßen zu komplizierteren Ergebnissen.

Um das Resultat in dimensionsloser Form, unabhängig von der Größe und den Materialeigenschaften der Konstruktion darzustellen, führen wir den Verfestigungsfaktor (p) ein:

$$p = \frac{P}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

also das Verhältnis der tatsächlichen Last (P), die der Stab bis zur Ausknickung tragen kann, zur Eulerlast für ungestützte Schneidenlagerung

$$Q = \frac{\pi^2 E J}{L^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

für die ganze Spannweite (L). Um nun die Steifigkeit der Stützen (S) auf ähnlich dimensionslose Einheiten zu beziehen, wollen wir die „relative" Steifigkeit (s) einführen, als das Verhältnis der Rückführkraft für eine gedachte (obwohl unmögliche) Ausweichung gleich der ganzen Spannweite, zu der ursprünglichen Eulerlast derselben ganzen Spannweite; d. h.

$$s = \frac{S L}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Gewisse Eigenschaften elastisch gestützter Stäbe überblickt man sofort, bevor man zur Lösung des mathematischen Teils des Problems schreitet.

Bei einer Anzahl (m) gleichmäßig voneinander entfernter Stützen, welche die Spannweite in $(n = m + 1)$ Intervalle teilen, kann die Verfestigung (p) von 1 bis n^2 getrieben werden, aber nicht höher; sonst würde Ausknickung in n Feldern erfolgen, wobei der Stab sich in n Halbwellenlinien mit Knoten an den Stützpunkten biegen würde. Das Merkwürdige dabei ist, daß die Stützensteifigkeit keineswegs unendlich zu sein braucht, wie man hätte mutmaßen können. Vielmehr ist nur ein ganz bestimmtes Maß von Steifigkeit (s) nötig, um die Verfestigung auf ihr Maximum zu bringen. Dann ist die Grenze der Stützenwirkung voll erreicht und weitere Versteifung derselben würde nutzlos sein. Offensichtlich wird dieser Grenzwert der maximal erforderlichen Steifigkeit an verschiedenen Stellen entlang des Stabes verschieden sein. Die Lösung für die Steifigkeitsgrenze, welche die größtmögliche Verfestigung gewährt (n^2), ist natürlich diophantischer Art. Bis zu einem gewissen Grade kann verstärkte Steifigkeit an einer Stelle ein Defizit an einer andern ersetzen, aber nur in einer sehr beschränkten Weise.

Wenn die verfügbaren Steifigkeiten geringer sind als zur n^2-fachen Verstärkung erforderlich, dann wird die potentielle Festigkeit der Anordnung nicht erreicht; die tragbare Maximallast ist dann geringer. Wird letztere erreicht, so folgt Ausknickung in weniger als n Bögen. Es ist klar, daß die mathematische Behandlung derselben m verschiedene Lösungen liefern muß; je eine für einbogige, zwei-, drei-, vier-, bis $m = (n - 1)$-bogige Knickung. Alle ungeraden sind symmetrisch, alle geraden unsymmetrisch. Die Art der Ausknickung, die tatsächlich unter irgendwelcher Versteifungsbedingung eintritt, muß offensichtlich diejenige sein, welche der geringsten Verfestigung entspricht. Bei sehr schwachen oder „weichen" Stützen würde offenbar einfaches Ausknicken über der Gesamtspannweite bereits die Belastung beschränken. Versteift man die Stützen in der Mitte, nicht aber die nahe den Enden, so fordert das zu doppelter, unsymmetrischer Knickung heraus, während es bei einem Versteifen der äußeren Stützen bei einbogiger Knickung bleiben oder zu einer mehrbogigen führen kann, welche symmetrisch oder unsymmetrisch sein kann.

Betrachten wir nun den einfachsten Fall unseres Problems, den mit einer einzigen Zwischenstütze, gemäß Abb. 1a.

Das Gleichgewicht für eine (unendlich kleine) Ausweichung (f) in der Mitte, welche eine rückführende Kraft (Sf) der Stütze zur Folge hat, würde ausgedrückt durch:

$$E\,J\,y'' + P\,y - \frac{1}{2}\,S\,f\,x = 0 \quad \ldots \quad (4),$$

wobei (E) der Elastizitätsmodul und (J) das Trägheitsmoment des Balkens, (x) die Entfernung eines beliebigen Punktes entlang desselben von einem Ende ist. Das erste Glied ist das Biegungsmoment infolge der Krümmung, das zweite ist dasjenige infolge der Axiallast mal die örtliche Ausweichung als Hebelarm, und das dritte dasjenige infolge Auflagerreaktion, d. h. der Hälfte der negativen Federstützkraft.

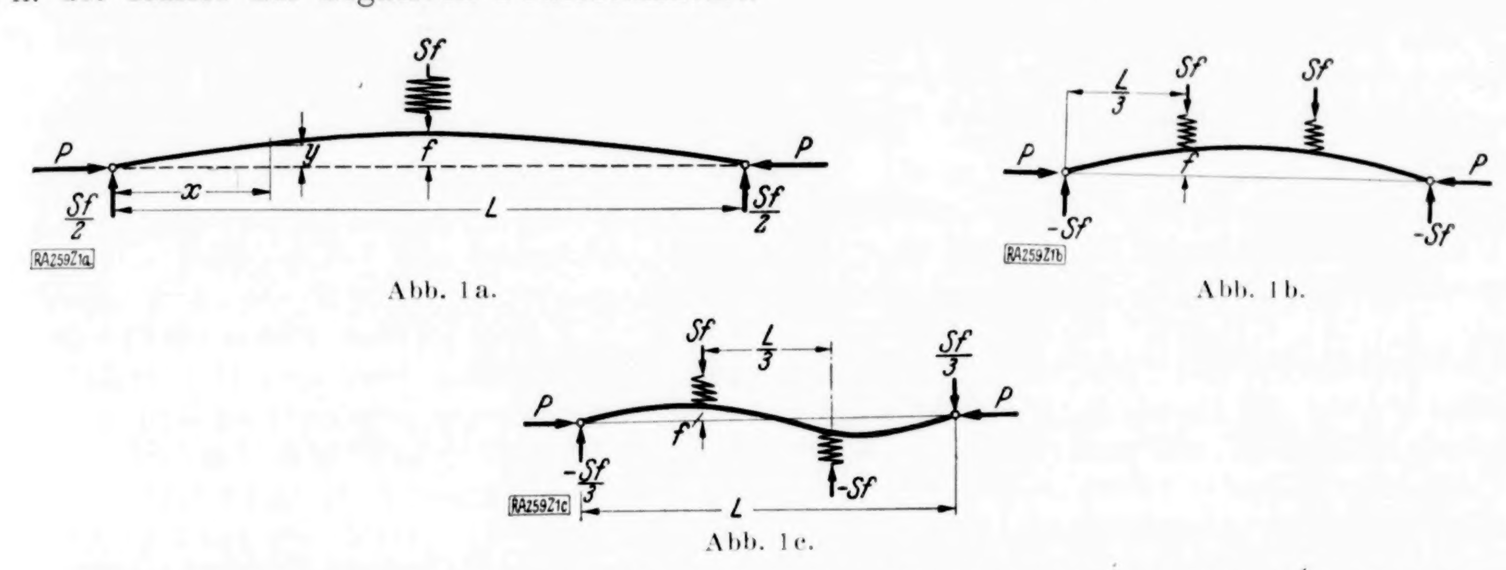


Abb. 1a. Abb. 1b. Abb. 1c.

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet durch Biegungslinien gemäß folgender Formel

$$y = A\cos\frac{x}{k} + B\sin\frac{x}{k} + \frac{S\,f\,x}{2\,P} \quad \ldots \quad (5),$$

daher

$$y'' = -\frac{A}{k^2}\cos\frac{x}{k} - \frac{B}{k^2}\sin\frac{x}{k} \quad \ldots \quad (6),$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{E\,J}{P}} \quad \text{und für später:} \quad \frac{L}{k} = \varphi = \pi\sqrt{p} \quad \ldots \quad (7).$$

Die Integrations-Konstanten (A) und (B) kann man ableiten aus der Tatsache, daß

bei $x = 0 : y = 0$ keine Ausweichung am Ende . . . . . . (8a),

bei $x = \frac{1}{2}L : y = f$ an dem Stützpunkt, wo (Sf) wirkt . . . (8b),

bei $x = \frac{1}{2}L : y' = 0$ symmetrische Ausbiegung bezeichnend . . (8c).

Diese drei aus (4) abgeleiteten Gleichungen genügen, nachdem man (y) und (y'') aus (5) und (6) eingesetzt hat, um (A), (B) und (f) zu eliminieren.

In der Tat:

$$A = 0 \text{ aus (8a)} \quad \ldots \quad (9a), \qquad B = -\frac{S\,f\,k}{2\,P\cos\frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots \quad (9b),$$

und das Resultat lautet:

$$s = \frac{4\,p}{1 - \frac{2}{\varphi}\tan\frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots \quad (10).$$

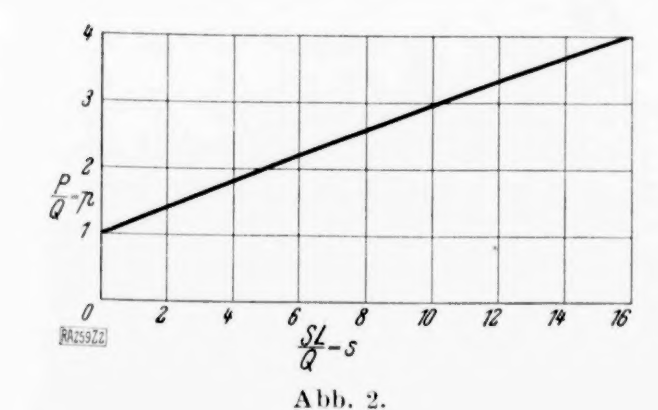


Abb. 2.

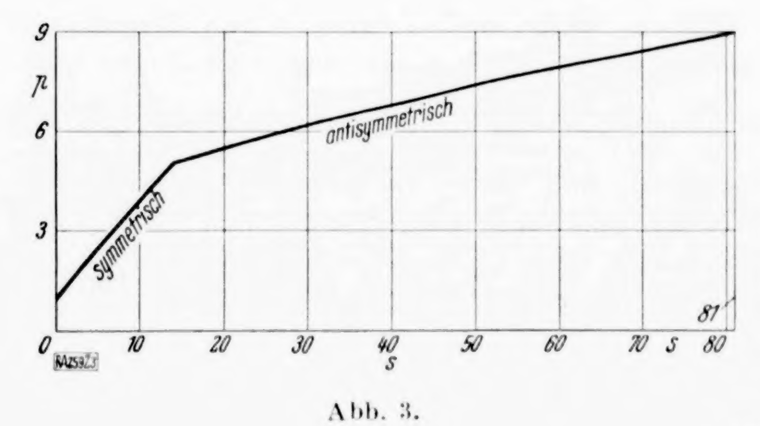


Abb. 3.

Diese Wechselbeziehung ist in Abb. 2 graphisch aufgetragen. Die Verfestigung (p) steigt beinahe linear mit der Steifigkeit von 1 bis 4, welch letzteren Wert man für $s = 16$ erhält. Weitere Steigerung von (s) würde zwecklos sein, weil dann zweibogige Ausknickung eintritt und doch die Last auf $p = 4$ beschränkt.

Der demnächst interessierende Fall wäre der von zwei Stützen in ein Drittel und zwei Drittel der Spannweite. Offenbar ist die größtmögliche Verfestigung $p = 9$, worauf dreibogige Knickung noch weitere Stützen erforderlich machen würde. Es ist auch klar, daß bei geringer Steifigkeit nur einbogige Knickung erfolgt, sobald die kritische Belastung erreicht wird. Jedoch, ob es irgendeinen Grad höherer Steifigkeit gibt, bei welchem antisymmetrische (zweibogige) Knickung die kritische Grenze bildet, war nicht ohne weiteres ersichtlich.

Die Gleichung für das Momentengleichgewicht im äußeren Teil zwischen dem Ende und der nächsten Stütze ist nun verschieden von der im inneren Teil zwischen den Stützen. Mit den entsprechenden Indizes a und i erhalten wir (symmetrische Biegung gemäß Abb. 1b vorausgesetzt):

$$\text{außen:} \quad E\,J\,y_a'' + P\,y_a - S\,f\,x = 0 \quad \ldots \quad (11\,\text{a}),$$

$$\text{innen:} \quad E\,J\,y_i'' + P\,y_i - \frac{S\,f\,L}{3} = 0 \quad \ldots \quad (11\,\text{b}).$$

Die Lösungen, welche diesen Gleichungen Genüge leisten, sind:

$$y_a = A_a \cos\frac{x}{k} + B_a \sin\frac{x}{k} + \frac{S\,f\,x}{P} \quad \ldots \quad (12\,\text{a}), \qquad y_i = A_i \cos\frac{x}{k} + B_i \sin\frac{x}{k} + \frac{S\,f\,L}{3} \quad \ldots \quad (12\,\text{b})$$

und deren zweite Ableitungen:

$$y_a'' = -\frac{A_a}{k^2}\cos\frac{x}{k} - \frac{B_a}{k^2}\sin\frac{x}{k} \quad \ldots \quad (13\,\text{a}), \qquad y_i'' = -\frac{A_i}{k^2}\cos\frac{x}{k} - \frac{B_i}{k^2}\sin\frac{x}{k} \quad \ldots \quad (13\,\text{b}).$$

Die Integrationskonstanten würden aus folgenden Eigenschaften abgeleitet werden können:

bei $x = 0 \quad : y = 0$ keine Ausbiegung am Ende . . . . . (14 a),

bei $x = L/3 : y_a = f$ zufolge Definition . . . . (14 b),

bei $x = L/3 : y_i = f$ als Ausdruck der Stetigkeit . . . . . (14 c),

bei $x = L/3 : y_a' = y_i'$ als Ausdruck der Stetigkeit . . . . . (14 d),

bei $x = L/2 : y_i' = 0$ wegen der Symmetrie. . . . . (15 a).

Die ersten vier Bedingungsgleichungen mögen dazu dienen, die folgenden Größen zu eliminieren:

$$A_a = 0 \quad \ldots \quad (16\,\text{a}),$$

$$B_a = -\frac{S\,f\,k}{P}\left(\sin\frac{\varphi}{3}\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{3}\right) \quad \ldots \quad (16\,\text{b}),$$

$$A_i = -\frac{S\,f\,k}{P}\sin\frac{\varphi}{3} \quad \ldots \quad (16\,\text{c}),$$

$$B_i = -\frac{S\,f\,k}{P}\sin\frac{\varphi}{3}\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2} \quad \ldots \quad (16\,\text{d}).$$

Eine der beiden andern wird dann f eliminieren.

Das Resultat ist (s) als Funktion von (p):

$$\text{symmetrisch:} \quad s = \frac{p}{\frac{1}{3} \cdot - \frac{1}{\varphi}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)} \quad \ldots \quad (17\,\text{a}).$$

Im Falle antisymmetrischer Knickgefahr, mit zwei Bögen nach Abb. 1c, sind die Endauflagerreaktionen quer zur Stabachse nicht gleich den negativen Zwischenstützkräften $S\,f$, sondern nur ein Drittel davon, da letztere jetzt nur mehr ein Moment $\frac{1}{3}\,S\,f\,L$ auf den Stab ausüben, das von den Endauflagen mit dem dreifachen Hebelarm aufgenommen wird. Somit werden jetzt die Gleichungen für das lokale Gleichgewicht aller Biegungsmomente:

$$\text{außen:} \quad E\,J\,y_a'' + P\,y_a - \frac{S\,f\,x}{3} = 0 \quad \ldots \quad (11\,\text{c}),$$

$$\text{innen:} \quad E\,J\,y_i'' + P\,y_i + \frac{S\,f}{3}(2\,x - L) = 0 \quad \ldots \quad (11\,\text{d}).$$

Die Gleichungen (12) ändern sich entsprechend. Während nun die Ableitungen (13) und die Randbedingungen (14) unverändert bestehen bleiben, tritt für die Symmetriebedingung (15a) die Antisymmetriebedingung ein:

$$\text{bei} \quad x = \frac{L}{2} : y_i = 0 \quad \ldots\ldots \quad (15\,\mathrm{b}).$$

Analoge Eliminationen und gewisse trigonometrische Vereinfachungen führen dann zu dem Resultat

$$\text{antisymmetrisch:} \quad s = \frac{p}{\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{\varphi}\left(\dfrac{1}{\cot\dfrac{\varphi}{3} + \cot\dfrac{\varphi}{6}}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (17\,\mathrm{b}).$$

Die beiden Resultate (17) sind in Abb. 3 graphisch aufgetragen, das symmetrische als steilere, das antisymmetrische als flachere Linie. Diese Darstellung zeigt, daß die Verfestigung beinahe proportional zur Steifigkeit der Stützen zunimmt, und zwar zuerst rasch, dann von $s = 15$, $p = 5$, ab langsamer. Die bei zwei Zwischenstützen größtmögliche Verfestigung, d. h. $p = 9$ wird durch eine Steifigkeit von $s = 81$ erzielt; eine weitere Steigerung der Steifigkeit würde nutzlos sein.

Indem wir nun zum nächsten Falle schreiten, d r e i S t ü t z e n, vier Intervalle, dürfen wir, ohne unsere Annahme von der Symmetrie der Anordnung zu verlassen, die beiden äußeren (Viertel-) Stützen unabhängig von der inneren (Mittel-) Stütze behandeln. Wir wollen erstere mit (S_a), letztere mit (S_i) bezeichnen und die entsprechende „relative" Steifigkeit mit (s_a) und (s_i).

Es ist klar, daß für $s_a = 0$ die Lösung mit der für eine einzige Stütze, nach Fall 1, übereinstimmen muß. Andererseits, wenn $s_i = 0$, müssen wir erwarten, daß die maximale Verfestigung beträchtlich höher als $p = 4$, aber geringer als $p = 9$ ist; denn dies letztere würde eine Anordnung der Stützen an der günstigsten Stelle erfordern, nämlich bei $L/3$ und nicht bei $L/4$.

Das Gleichgewicht für eine unendliche kleine Ausweichung wird nun durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\text{äußeres Intervall:} \quad EJ\,y_a'' + P\,y_a - S_a f_a x \quad - \frac{1}{2} s_i f_i x = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18\,\mathrm{a}),$$

$$\text{inneres Intervall:} \quad EJ\,y_i'' + P\,y_i - \frac{1}{4} S_a f_a L - \frac{1}{2} s_i f_i x = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18\,\mathrm{b}).$$

Die entsprechenden Lösungen lauten:

$$y_a = A_a \cos\frac{x}{k} + B_a \sin\frac{x}{k} + \left(S_a f_a + \frac{1}{2} S_i f_i\right) \cdot \frac{x}{P} \quad \ldots\ldots \quad (19\,\mathrm{a})$$

und

$$y_i = A_i \cos\frac{x}{k} + B_i \sin\frac{x}{k} + \frac{S_i f_i x}{2\,P} + \frac{S_a f_a L}{4\,P} \quad \ldots\ldots \quad (19\,\mathrm{b})$$

und ihre Krümmungsableitungen:

$$y_a'' = -\frac{A_a}{k^2}\cos\frac{x}{k} - \frac{B_a}{k^2}\sin\frac{x}{k} \quad \ldots\ldots \quad (20\,\mathrm{a}),$$

$$y_i'' = -\frac{A_i}{k^2}\cos\frac{x}{k} - \frac{B_i}{k^2}\sin\frac{x}{k} \quad \ldots\ldots \quad (20\,\mathrm{b}).$$

Die Elimination von A_a, A_i, B_a, B_i sowohl als der unendlich kleinen f_a und f_i kann auf Grund folgender Eigenschaften vorgenommen werden:

$$\text{bei} \quad x = 0 \quad : y_a = 0 \qquad \text{wie zuvor} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{a}),$$

$$\text{bei} \quad x = \frac{1}{4} L : y_a = f_a \qquad \text{zufolge Definition} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{b}),$$

$$\text{bei} \quad x = \frac{1}{4} L : y_i = f_a \qquad \text{wegen Stetigkeit} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{c}),$$

$$\text{bei} \quad x = \frac{1}{4} L : y_a' = y_i' \qquad \text{wegen Stetigkeit} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{d}),$$

$$\text{bei} \quad x = \frac{1}{2} L : y_i = f_i \qquad \text{zufolge Definition} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{e}),$$

$$\text{bei} \quad x = \frac{1}{2} L : y_i' = 0 \qquad \text{nur bei symmetrischer Ausknickung} \quad \ldots \quad (21\,\mathrm{f}).$$

Demnach

$$A_a = 0 \quad \ldots \quad (22\,\mathrm{a}),$$

$$B_a = \frac{f_a - \left(S_a f_a + \frac{1}{2} S_i f_i\right) \frac{L}{4P}}{\sin \frac{\varphi}{4}} \quad \ldots \quad (22\,\mathrm{b}),$$

$$A_i = -\frac{S_a f_a k}{P} \sin \frac{\varphi}{4} \quad \ldots \quad (22\,\mathrm{c}),$$

$$B_i = \frac{f_i}{\sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{S_a f_a k}{P} \sin \frac{\varphi}{4} \cot \frac{\varphi}{2} - \frac{S_i f_i L}{4P \sin \frac{\varphi}{2}} - \frac{S_a f_a L}{4P \sin \frac{\varphi}{2}} \quad \ldots \quad (22\,\mathrm{d}),$$

sonach

$$\frac{C_1}{p}(s_a + s_i) + \frac{C_2}{p^2} s_a s_i = C_3 \quad \ldots \quad (23),$$

worin:

$$C_1 = \frac{1}{4} \cot \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\varphi},$$

$$C_2 = \frac{1}{4\varphi} - \frac{1}{4\varphi^2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{8\varphi} \sec \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{32} \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$C_3 = \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Das Resultat ist in Parameterdarstellung in Abb. 4 aufgezeichnet. Die hyperbelähnlichen Kurven, die in einem Koordinatennetz von s_a gegen s_i eingetragen sind, veranschaulichen die Bedingungen gleicher Verfestigung. $p = 16$ ist natürlich das Maximum, das bei drei gleichmäßig voneinander entfernten Stützen überhaupt zu erzielen ist. Es kann bei s_i und s_a je 218,5 erreicht werden, oder auch mit größerer Steifigkeit s_i, wenn s_a unterhalb von 218,5 bleibt oder umgekehrt. Jedoch keine von beiden darf weniger als 128 betragen, sonst könnte selbst unendliche Steifigkeit der anderen den Mangel nicht wettmachen. Die Symmetrie der Kurven zu einer 45°-Linie kam schon in Gl. (23), welche nur die Summe und das Produkt der beiden s enthält, zum Ausdruck. Diesem Resultate zufolge könnte man vermuten, daß s_a und s_i eine völlig gleichwertige und vertauschbare Rolle spielen. Jedoch hat dies eine Grenze, insofern als bei ungenügender Steifigkeit s_a der Viertelstützen eine antisymmetrische Ausknickung eintreten würde, während bei ungenügender Mittelstützensteifigkeit dies niemals der Fall sein könnte.

Die geringste Viertelstützensteifigkeit s_a, die benötigt wird, um für irgendein bestimmtes Maß von Verfestigung zwischen 4 und 16 antisymmetrische Zweibogenknickung zu verhüten, ist leicht zu finden, indem man das Theorem des Einstützenfalles (Kapitel 1) auf einen Balken von $\frac{1}{2} L$ Länge überträgt. Die Wechselbeziehung zwischen s_a und p in unserer Dreistützenterminologie kann daher gleich von Abb. 2 abgelesen werden, indem man alle Ordinaten mit 4 und alle Abszissen mit 8 multipliziert.

Dieses Resultat ist in Abb. 4 dadurch wiedergegeben, daß die verschiedenen p-Linien bei dem mindestnotwendigen s_a abgebrochen und horizontal fortgesetzt worden sind; denn, wieviel s_i auch immer zur Verfügung stünde, s_a könnte doch nicht weiter reduziert werden, wenn dasselbe p erreicht werden soll. Die strichpunktierte Linie, welche die Abbruchecken verbindet, trennt die Steifigkeitsbedingungen zwischen s_a und s_i, unter welchen die kritische Ausknickung symmetrisch oder antisymmetrisch wäre[1]).

Um die Verfestigung über 4 hinauszutreiben, erweisen sich die Viertelstützen von höchster Wichtigkeit. Z. B., um $p = 7$ zu erzielen, ist wenigstens 6-mal soviel s_a als s_i nötig. Tatsächlich kann man bis ungefähr $p = 8{,}2$, also, wie erwartet, weniger als bis 9, ohne irgendwelche Mittelstützen, nur durch steife Viertelstützen erreichen. Über 8,2 hinaus kreuzen die p-Linien die s_a-Achse nicht mehr. Die Stelle ihrer senkrechten Asymptoten bezeichnet das Minimum von s_i, das auch bei unendlichem s_a nötig wäre. Bei Zunahme von p $\left(\text{über } 12\frac{1}{2}\right)$ gewinnt s_i wieder an Einfluß, und mehr und mehr Spielraum bleibt für die Wahl des Verhältnisses von s_i zu s_a. Übrigens sind die in Abb. 4 vom Ursprung ausgehenden Radien Linien gleichen $s_i : s_a$-Wertes. Die Abbildung gestattet, für jeden beliebigen Wert von s_i und s_a die Verfestigung p zu interpolieren und den Typus der kritischen Ausknickung abzulesen.

[1]) In Abb. 4 steht s_1 für s_a und s_2 für s_i.

Die Erweiterung dieser Theorie auf irgendwelche größere Anzahl von Stützen bietet keinerlei neue Schwierigkeiten. Jedoch ein interessantes Problem wird aufgerollt, wenn ihre Anzahl unendlich wird, wie etwa z. B. der Fall wäre, wenn wir den Einfluß eines dichtmaschigen, elastischen Netzes oder einer textilen Stützung, die sich über die ganze Spannweite des Balkens erstreckte, zu untersuchen hätten. Im folgenden Abschnitt wollen wir dieses Problem behandeln, jedoch mit der Beschränkung, daß wir die Verteilung der stützenden Steifigkeit als gleichmäßig den Balken entlang annehmen, d. h. $dS/dx = \mathrm{Const} = S'$ und $s' = S'L^2/Q$.

Man kann natürlich irgendeine andere bekannte Funktion $S'(x)$ in ähnlicher Weise einführen, aber das Resultat wird dann natürlich komplizierter sein.

Einige allgemeine Ergebnisse erhellen bereits aus einer einfachen Überlegung, bevor man an die mathematische Behandlung geht. Wenn die Stützung sich kontinuierlich über die ganze Spannweite erstreckt, aber äußerst schwach ist, so wird ihr Einfluß lediglich die Knickfestigkeit des Stabes etwas über den Eulerwert (Q) erhöhen. Der Stab wird noch immer einbogig ausknicken. Wenn die Steifigkeit groß genug wird, biegt sich der Stab in mehr Wellenlinien aus; und bei unendlicher Steifigkeit würde auch die Tragfähigkeit des Stabes schließlich unendlich werden. Also für irgendwelchen endlichen Grad von Steifigkeit wird es eine bestimmte Anzahl von Bogen geben, in die der Stab endlich ausknickt.

Die Gleichung des Momentengleichgewichts bei gleichmäßig über die ganze Spannweite verteilter Stützung lautet:

$$EJy'' + Py + S'\int_0^x y\,\xi\,d\xi - \frac{1}{2}S'\int_0^L y\,dx = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (24),$$

worin ξ eine neue Variable ist, die eingeführt wurde, um den Hebelarm $(x-\xi)$ des unendlich kleinen Beitrages der rückführenden Kraft $S'y\,d\xi$ auszudrücken.

Indem wir diese Gleichung zweimal differenzieren:

$$y'''' - \frac{P}{EJ}y'' + \frac{S'}{EJ}y = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (25).$$

erhalten wir die Lösung

$$y = A\cdot\sin\frac{x}{j} \quad \text{. . . . .} \quad (26),$$

wobei (j) die Wurzel der Gleichung

$$j^{-4} - \frac{P}{EJ}j^{-2} + \frac{S'}{EJ} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (27)$$

ist und daher

$$j = \sqrt{\frac{\frac{EJ}{P}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{S'EJ}{P^2}}}} \quad \text{. . . . .} \quad (28).$$

Beachte, daß für $S' = 0$, $j = k$.

Am andern Ende des Stabes, $(x = L)$, ist

$$y = A\cdot\sin\frac{L}{j} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (29)$$

und $L/j = n\pi$ oder $j = L/n\pi$, wobei n irgendeine ganze Zahl von Bögen bezeichnet.

Wenn wir diesen Wert von (j) in (27) einsetzen, erhalten wir:

$$s' = (p - n^2)\cdot n^2\pi^2 \quad \text{. . . . .} \quad (30).$$

So sieht man, daß bei irgendeiner bestimmten Anzahl von Ausknickungen (p) eine lineare Funktion von (s') ist. Demnach erscheint, wenn man die Werte von (n) steigert, die Beziehung zwischen (p) und (s') in Abb. 5 als eine Reihe gerader Linien, welche $s' = 0$ bei $p = 1, 4, 9, 16, 25$ usw. für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ usw. schneiden, und alle steigen nach rechts an, wie selbstverständlich. Offensichtlich ist die tatsächliche Beziehung von (p) zu (s') die volle, dicke, gebrochene Linie, wobei jede Gerade (n) nur soweit gilt, bis sie die Gerade $n+1$ schneidet; dann gilt diese. Diese Schnittpunkte ergeben sich aus der Gleichung $p = n^2 + (n+1)^2$ und sind demzufolge bei $p = 1, 5, 13, 25, 41$ usw. zu finden.

Die in Abb. 2, 3 und 4 dargestellten Resultate sind in Abb. 5 als punktierte Kurven nochmals mit eingetragen, und zwar natürlich in einem logischen Vergleichsmaßstabe, nämlich indem man σ, die Summe aller Steifigkeiten, die auf den Stab einwirken, an Stelle des Wertes einer einzelnen Steifigkeit als Abszisse aufgetragen hat.

Ein Vergleich der Kurven zeigt, daß die gleichmäßig verteilte Steifigkeit, wie vermutet, die Mindestwirksame ist. Um irgendeinen beliebigen Wert von (p) zu erreichen, wird von einem fortlaufend gestützten Stabe mehr Totalsteifigkeit erfordert, als von irgendeinem andern. Jedoch wenn der Stab in eine bestimmte Anzahl von Bogen ausknicken soll, so können bei kontinuierlicher Verteilung der Stützen höhere Werte von (p) erzielt werden.

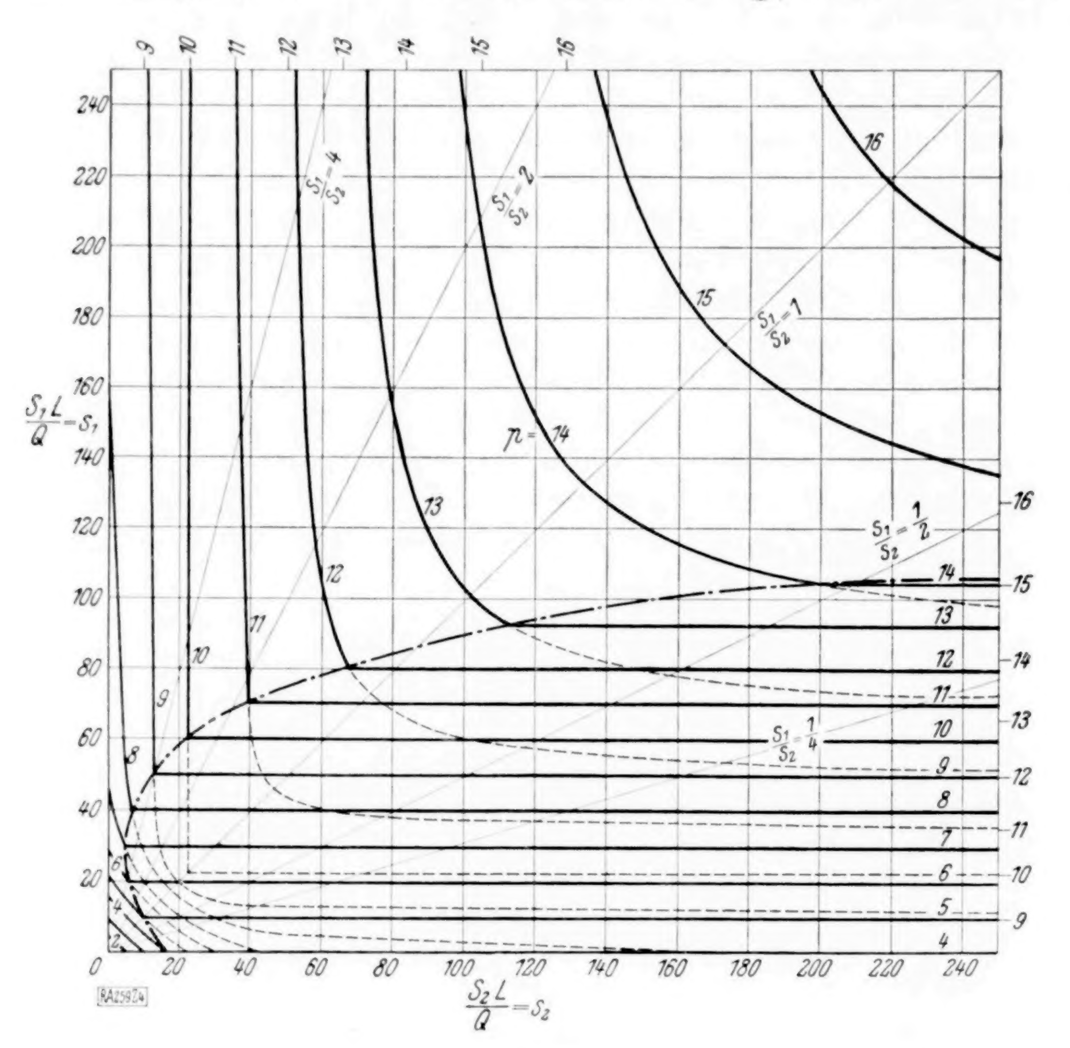


Abb. 4.

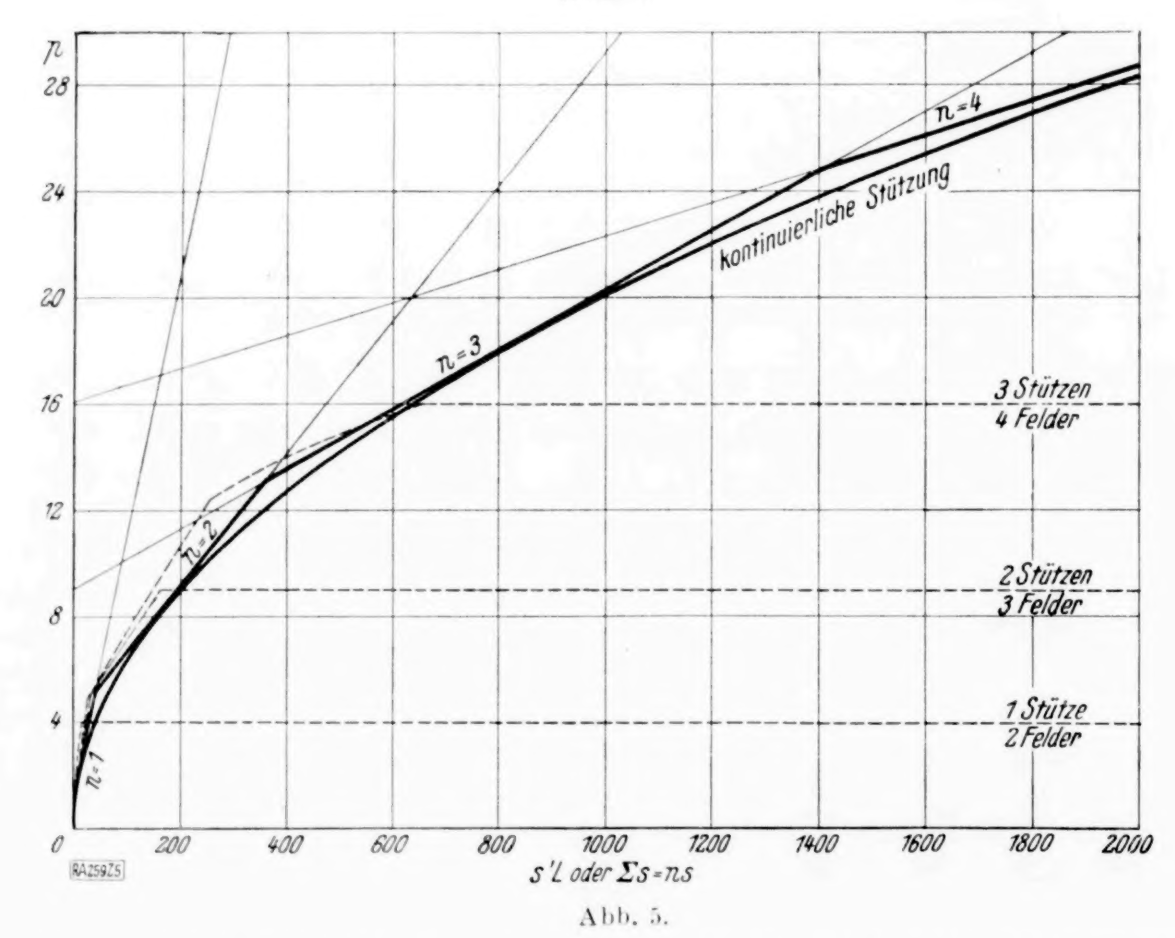


Abb. 5.

Wären andere als ganze Zahlen von Bögen möglich, so könnte die Beziehung zwischen (p) und (s') durch Differenzieren der rechten Seite von (30) gefunden werden, was zu

$$s' = \left(\frac{1}{2}\,\pi\,p\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

führen würde. Diese Parabel ist in Abb. 5 mit dargestellt. Sie berührt die einhüllenden Geraden bei $p = 2$, 8, 18, 32, 50 usw. Andere Punkte der Parabel sind nur hypothetisch.

Man würde denken, daß die Kurve nicht weiter interessiert[2]). Indessen erweist sich, daß die Verfestigung, die von mehreren einzelnen, in gleichen Abständen angebrachten Stützen geboten wird, bei steigender Zahl sich sehr bald der nähert, die eine gleiche Menge kontinuierlicher gleichförmig verteilter Stützung gewährt. Die Parabel $p = \frac{2}{\pi}\sqrt{s'}$ ist demnach eine ziemlich gute Näherung, die auf alle solchen Fälle paßt, bei denen die Stützungsverteilung eine regelmäßige ist, und deren Gesamtstützungswert, d. h. alle (S) über die ganze Spannweite $\sigma = \int_0^L s'\,dx$ beträgt, vorausgesetzt, daß die Eulerlast des größten einzelnen ungestützten Intervalles nicht überschritten wird.

Interessante Probleme tauchen auf, wenn beides vorhanden ist, sowohl kontinuierliche als einzelne Stützungen. Unter Umständen verstärken sie einander, unter anderen tun sie das nicht, und dann bleibt die minderwirksame von beiden einflußlos.

Übrigens können die abgeleiteten Formeln durch Experimente an Zelluloid- oder Metallstäben bestätigt werden, welch letztere in einer Materialprüfungsmaschine belastet werden, wobei man gleichzeitig ein System von Federn mit bekannter Steifigkeit anbringt, welche den Stab geradezuhalten trachten.

Theorien der hier vorgeführten Art[3]) eröffnen aussichtsreiche Wege zur Behandlung des Stabilitätsproblems bei praktischen Konstruktionen, welche zu kompliziert, zu empfindlich oder zu teuer sind, um tatsächlich einer experimentellen Stabilitätsprüfung durch Axialkräfte unterworfen zu werden. Solche Versuche sind immer mißlich wegen der riesigen Kräfte, die benötigt werden, und der Schwierigkeiten, die ihr Angriff an der Konstruktion verursacht, ganz abgesehen von der Gefahr, einen eventuellen Zusammenbruch nicht mehr aufhalten zu können oder dauernden Schaden zuzufügen, wenn die Stabilitätsgrenze durch die Belastung erreicht wird. Statt dessen ist jetzt nur ein Biegungsexperiment mit sehr kleiner Belastung und doch leicht meßbaren Ausbiegungen nötig. Die Last wird an der Stelle angebracht, wo sich die elastische Stützung befindet. Die Last wird sich dann als größer erweisen als diejenige, welche die gleiche Ausbiegung (f) ohne die elastische Stütze bewirken würde. Der Unterschied muß gleich Sf sein und ergibt demnach sofort die Stützensteifigkeit (S). Wenn mehr als eine Stützensteifigkeit bestimmt werden soll, so müssen mehrere Biegungsexperimente mit verschiedener Verteilung der Belastung ausgeführt werden. Die verschiedenen Werte von S_1, S_2 usw. und S' müssen, wenn nötig, durch ein System von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten errechnet werden. In diesem Falle muß man darauf achten, daß die Unbekannten sich nicht als kleine Differenzen größerer Produkte ergeben und daher sehr ungenau werden. Diese Schwierigkeit umgeht man am besten dadurch, daß die Lastverteilung so eingerichtet wird, daß jeder Versuch für eine bestimmte Unbekannte besonders genau wird. Dann wird progressive Einsetzung der einen für die andere zum wahrscheinlichsten Werte jeder einzelnen führen. Beim Durchführen solcher Versuche ist es natürlich von Wichtigkeit, sich zu vergewissern, daß die Balken frei von Axialspannungen sind, nicht nur im unbelasteten Zustande, sondern besonders auch im gebogenen Zustande. Wenn dies unmöglich ist, so wird es sich nötig machen, die während des Versuchs vorhandenen Druck- oder Zugkräfte zu bestimmen und in entsprechende Anrechnung zu bringen.

Solche Versuche haben sich beim Bau des Luftschiffs Akron durch die Goodyear Zeppelin-Gesellschaft als nützlich erwiesen und sehr wertvolle Aufschlüsse geliefert. 259

[2]) Ein ähnliches Knickproblem mit gleichmäßig verteilter, elastischer Stützung wurde übrigens von Baurat Dr. H. Zimmermann behandelt: Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906 (Wilh. Ernst & Sohn). Seine Resultate weichen indessen erheblich von den obigen ab und weisen verschiedene Merkwürdigkeiten auf. Die Unterschiede rühren davon her, daß Zimmermann hier den Endpunkten des Stabes Nachgiebigkeit zuschreibt, dafür die mittlere Durchbiegung Null vorschreibt, wie im Falle eines unendlich langen Schienenstranges. In unserm Falle sind die Enden aber am Ausknicken verhindert und daher dort keine Rückführkräfte vorhanden.

[3]) Einige der in der vorstehenden Arbeit vorkommenden Probleme wurden, wie den Verfassern nachträglich bekannt wurde, bereits von andern behandelt, wenn auch zumeist anders dargestellt. Zum Beispiel haben sich Fillunger und Jezek (Bauingenieur 1931, 50) mit dem Fall einer, S. Timoshenko mit dem von einer und zwei Stützen befaßt. Bleich hat in der „Theorie und Berechnung eiserner Brücken" (Springer 1924) eine Formel für beliebig viel gleichsteife Stützen in gleichen Abständen abgeleitet. In einer russischen Arbeit hat J. Boobnof die maximal noch nützliche Steifigkeit für beliebige Anzahl Felder (n) ermittelt. Die von ihm errechneten Koeffizienten erfüllen merkwürdigerweise sehr nahezu (bis auf $^1/_2$ %₀ oder genauer) die Gleichung

$$s_{max} = \sim \frac{4\,n^4\,(n-1)}{n^2 - n + 2}\,.$$

(Dr. H. Ebner weist darauf hin, daß der Ausdruck gleich $2\,n^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right)$ sein muß.) Das Problem kontinuierlicher elastischer Stützung wurde von Fr. Engesser (1884, 1885, 1893) von H. Zimmermann (1907 und 1910) und von S. Timoshenko (1916) behandelt.

Laminare Strahlausbreitung.

Von *H. Schlichting* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

In der Literatur ist bisher das Problem der laminaren Strahlausbreitung, d. i. die Vermischung eines aus einer Öffnung austretenden Flüssigkeitsstrahles mit der umgebenden ruhenden Flüssigkeit unter der Wirkung des laminaren Reibungsgesetzes, meines Wissens noch nicht behandelt worden. Das analoge Problem für eine turbulente Strömung ist schon früher von W. Tollmien[1]) gelöst worden. Die in ihrer mathematischen Behandlung sehr ähnlichen Nachlaufströmungen sind sowohl für den laminaren[2]) wie für den turbulenten[3]) Fall bekannt. Die Berechnung der laminaren Strahlausbreitung nach den Methoden der Prandtlschen Grenzschichttheorie[4]) führt auf keine mathematischen Schwierigkeiten. Ganz besonders einfach gestaltet sich die Rechnung für den rotationssymmetrischen Strahl, so daß sie hier kurz wiedergegeben werden möge.

Wir wählen Zylinderkoordinaten: Der Ursprung falle mit der für die Rechnung als punktförmig angenommenen Öffnung in der Wand zusammen, aus welcher der Strahl austritt. Die x-Achse falle in die Strahlachse, und y sei der radiale Abstand von der Strahlachse. Im Sinne der Grenzschichttheorie wird nur die Bewegungsgleichung für die x-Richtung berücksichtigt, welche, wenn man den Druck als konstant annimmt, lautet:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\frac{1}{y}\frac{\partial(\tau y)}{\partial y} \quad \ldots \quad (1),$$

wobei für die Schubspannung τ nach dem laminaren Reibungsgesetz $\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$ gesetzt wird (ϱ = Dichte; μ = Zähigkeit; ν = kinematische Zähigkeit). Die Kontinuitätsgleichung ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{y}=0 \quad \ldots \quad (2).$$

Um Gl. (1) zu integrieren, machen wir für die Stromfunktion $\psi=\int_0^y u\,y\,dy$ mit zunächst unbekannten Exponenten und unter Fortlassung konstanter Faktoren den Ansatz:

$$\psi\sim x^p F(\eta) \text{ mit } \eta\sim\frac{y}{x^n} \quad \ldots \quad (3).$$

Die Exponenten p und n werden daraus bestimmt, daß 1. wegen des vorausgesetzten konstanten Druckes der Impuls $2\pi\varrho\int_0^\infty u^2\,y\,dy=\text{const}$ und 2. wegen des Gleichgewichts zwischen Trägheits- und Reibungskräften das Trägheitsglied $u\frac{\partial u}{\partial x}$ in bezug auf x von der gleichen Größenordnung sein muß wie das Reibungsglied $\frac{1}{\varrho}\frac{1}{y}\frac{\partial(\tau y)}{\partial y}$. Durch Differentiation erhält man aus dem Ansatz (3):

$$u=\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\sim x^{p-2n};\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\sim x^{p-2n-1};$$

$$\frac{\tau}{\varrho}=\nu\frac{\partial u}{\partial y}\sim x^{p-3n};\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{1}{y}\frac{\partial(\tau y)}{\partial y}\sim x^{p-4n}$$

und somit für p und n die beiden Gleichungen:

$$2p-4n+2n=0,\ 2p-4n-1=p-4n$$

und hieraus

$$p=n=1\,.$$

[1]) W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 6. 1926. S. 468.

[2]) S. Goldstein: Proc. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. 26 Part 1, 1930, und W. Tollmien: Handbuch der Experimentalphysik Bd. 4, Teil I, S. 269. Leipzig 1931.

[3]) H. Schlichting: Über das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. Bd. 1, S. 533, 1930. und L. M. Swain: On the turbulent wake behind a body of revolution. Proc. of the Roy. Soc. A. Vol. 125. 647, 1929.

[4]) L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“, Göttingen 1927.

Wir schreiben jetzt die Ansätze (3) vollständig auf und setzen

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \nu\, x\, F(\eta)\\ \eta &= \frac{y}{x}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Dann ist wegen $u = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und $v = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$:

$$u = \frac{\nu}{x}\frac{F'}{\eta}, \qquad v = \frac{\nu}{x}\left(F' - \frac{F}{\eta}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

und

$$\frac{1}{\varrho}\frac{1}{y}\frac{\partial(\tau y)}{\partial y} = \frac{\nu^2}{x^3}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right),$$

wobei der Strich bei F die Differentiation nach η bedeutet.

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1) erhält man nach Division durch $\frac{\nu^2}{x^3}\frac{1}{\eta}$ für die Stromfunktion F die Differentialgleichung:

$$\frac{F\,F'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{F\,F''}{\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right),$$

und nach einmaliger Integration:

$$F\,F' = F' - \eta\, F'' \quad \ldots\ldots (6).$$

Die Randbedingungen sind:

$$y = 0 \ : \ \text{d. i. } \eta = 0 \ : \qquad u = u_m: \ \text{d. i. } F'' = 0$$
$$v = 0: \ \text{d. i. } F = 0.$$

Da u eine gerade Funktion von η ist, muß also $\frac{F'}{\eta}$ gerade sein, also F' ungerade und F gerade. Wegen $F(0) = 0$ ist das konstante Glied in der Entwicklung von F nach Potenzen von η gleich Null, womit e i n e Integrationskonstante bestimmt ist.

Das Eingehen der zweiten Integrationskonstanten, die wir mit γ bezeichnen wollen, erkennt man leicht folgendermaßen: Ist $F(\eta)$ eine Lösung von (6), dann ist auch $F(\gamma\,\eta) = F(\xi)$ eine Lösung, denn durch die Transformation

$$\xi = \gamma\,\eta \quad \ldots\ldots (7)$$

geht die Differentialgleichung (6) in sich über. Eine Lösung der Differentialgleichung

$$F\frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{d\xi} - \xi\frac{d^2F}{d\xi^2},$$

welche die Randbedingungen $\xi = 0$: $F = 0$, $F' = 0$ erfüllt, läßt sich sofort in geschlossener Form angeben; sie lautet:

$$F = \frac{\xi^2}{1 + \frac{\xi^2}{4}} \quad \ldots\ldots (8),$$

wie man durch Differenzieren leicht verifiziert.

Damit ergibt sich nach Gl. (5):

$$u = \frac{\nu}{x}\gamma^2\frac{1}{\xi}\frac{dF}{d\xi} = \frac{\nu}{x}\frac{2\gamma^2}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2},$$

$$v = \frac{\nu}{x}\gamma\left\{\frac{dF}{d\xi} - \frac{F}{\xi}\right\} = \frac{\nu}{x}\gamma\frac{\xi - \frac{\xi^3}{4}}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)^2},$$

wobei nach Gl. (4) und (7) $\xi = \gamma\frac{y}{x}$ ist und die Integrationskonstante γ noch aus dem vorgegebenen Impuls des Strahles zu bestimmen ist.

Für den Impuls des Strahles erhält man

$$J = 2\pi\varrho \int_0^\infty u^2\, y\, d\, y = \frac{16}{3}\pi\gamma^2\varrho\nu^2 .$$

Da außer der kinematischen Zähigkeit der Impuls eine charakteristische und physikalisch wesentliche Konstante des Strahles ist, schreiben wir die Resultate so, daß in ihnen nur diese beiden Größen auftreten. Bezeichnen wir noch mit $K = \frac{J}{\varrho}$ den „kinematischen Impuls" des Strahles, so ergibt sich

$$u = \frac{3}{8\pi}\frac{K}{\nu x}\frac{1}{\left(1+\frac{\xi^2}{4}\right)^2}, \qquad v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sqrt{K}}{x}\frac{\xi-\frac{\xi^3}{4}}{\left(1+\frac{\xi^2}{4}\right)^2}$$

mit

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}\frac{\sqrt{K}}{\nu}\frac{y}{x}.$$

Bezeichnen wir als charakteristische Breite $2b^*$ des Strahles den Abstand derjenigen Punkte, wo die Geschwindigkeit halb so groß ist wie in der Symmetrielinie, so ist

$$2b^* = 2{,}57\sqrt{\frac{16\pi}{3}}\frac{\nu x}{\sqrt{K}}.$$

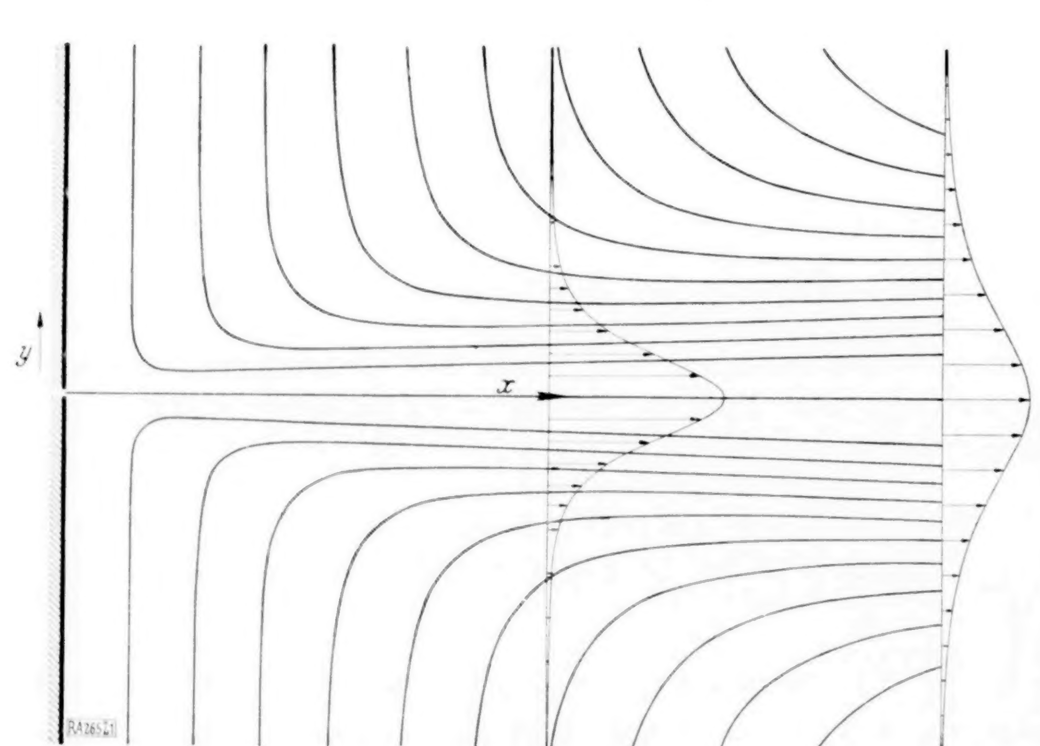


Abb. 1. Stromlinienbild des runden Strahles.
(Die Breite des Strahles ist $\left(\frac{0{,}0229}{\nu}\sqrt{K}\right)$-fach überhöht.)

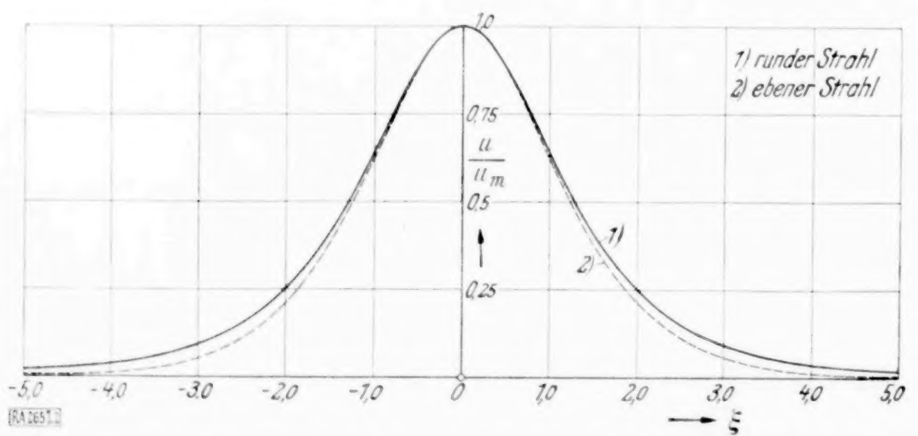


Abb. 2. Die u-Komponente des runden und ebenen Strahles, wobei $\xi = \sqrt{\frac{3K}{16\pi}}\frac{y}{\nu x}$ und $u_m = \frac{3}{8\pi}\frac{K}{\nu x}$ für den runden, und $\xi = 0{,}404\, k^{\frac{1}{3}}\frac{y}{(\nu x)^{2/3}}$ und $u_m = 0{,}490\left(\frac{k^2}{\nu x}\right)^{\frac{1}{3}}$ für den ebenen Strahl.

Für die Durchflußmenge $Q = 2\pi\int_0^\infty u\, y\, d\, y$ (Volumen pro sec), die wegen der seitlichen Zuströmung mit wachsendem Lochabstand zunimmt, erhält man die einfache Formel:

$$Q = 8\pi\nu x .$$

Für den runden laminaren Strahl hat man also das eigenartige Ergebnis, daß die Durchflußmenge in einem bestimmten Lochabstand unabhängig ist von dem Impuls des Strahles, d. h. unabhängig vom Überdruck, unter welchem der Strahl aus der Öffnung ausfließt. Ein Strahl, der unter großem Druck (mit großer Geschwindigkeit) ausfließt, bleibt schmaler als ein anderer Strahl, der unter geringerem Druck (mit kleinerer Geschwindigkeit) ausfließt; dieser reißt verhältnismäßig mehr ruhende Flüssigkeit mit sich, so daß die Durchflußmenge bei gleicher kinematischer Zähigkeit in beiden Fällen in gleichem Lochabstand dieselbe ist.

Ein Stromlinienbild sowie ein graphisches Bild der u-Komponente findet man in Abb. 1 und 2.

In derselben Weise wie der runde Strahl ist auch der ebene laminare Strahl, also die

Vermischung eines aus einem langen, schmalen Spalt austretenden Flüssigkeitsstrahles mit der umgebenden ruhenden Flüssigkeit, berechnet worden. Die Rechnung ist weniger einfach, sodaß sie hier nicht wiedergegeben werden soll. Die Abnahme der Geschwindigkeit in der Strahlmitte und die Zunahme der Strahlbreite mit dem Abstand von der Öffnung ergeben sich wieder aus dem konstanten Impuls und dem Gleichgewicht zwischen Trägheits- und Reibungskräften. Die Differentialgleichung für die Stromfunktion läßt sich in diesem Fall nicht geschlossen integrieren, sondern man hat eine Potenzreihenentwicklung um $\eta = 0$ und eine asymptotische Lösung für große η aneinanderzufügen. Die Resultate lassen sich wieder so darstellen, daß in ihnen an physikalisch wesentlichen Konstanten nur die kinematische Zähigkeit und der kinematische Impuls des Strahles vorkommen. Bedeutet

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, d y$$

den kinematischen Impuls für eine Schicht der Höhe Eins senkrecht zur xy-Ebene, so erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = 0{,}490 \left(\frac{k^2}{\nu x}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{d Z}{d \xi}, \qquad v = 0{,}404 \left(\frac{k \nu}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{2 \xi \frac{d Z}{d \xi} - Z\right\}$$

und für die Stromfunktion

$$\psi = 1{,}212 \, (k \nu x)^{\frac{1}{3}} Z, \text{ wobei } \xi = 0{,}404 \, k^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{2}{3}} \frac{y}{x^{2/3}}$$

und die Funktion $Z(\xi)$ in der nebenstehenden Zahlentafel angegeben ist; $\frac{d Z}{d \xi}$ ist als gestrichelte Kurve in Abb. 2 aufgenommen.

Zahlentafel.

ξ	$Z(\xi)$	$\frac{dZ}{d\xi}$	$\frac{1}{3}\left(2\xi\frac{dZ}{d\xi} - Z\right)$	ξ	$Z(\xi)$	$\frac{dZ}{d\xi}$	$\frac{1}{3}\left(2\xi\frac{dZ}{d\xi} - Z\right)$
0	0	1,000	0	1,6	1,148	0,342	— 0,018
0,1	0,100	0,995	+ 0,033	1,7	1,180	0,304	— 0,049
0,2	0,199	0,980	+ 0,065	1,8	1,208	0,270	— 0,079
0,3	0,296	0,956	+ 0,093	1,9	1,234	0,239	— 0,109
0,4	0,390	0,924	+ 0,117	2,0	1,256	0,211	— 0,137
0,5	0,480	0,884	+ 0,135	2,1	1,276	0,186	— 0,165
0,6	0,566	0,840	+ 0,147	2,2	1,293	0,165	— 0,189
0,7	0,648	0,790	+ 0,156	2,4	1,322	0,125	— 0,241
0,8	0,724	0,738	+ 0,152	2,6	1,343	0,094	— 0,285
0,9	0,795	0,684	+ 0,145	2,8	1,360	0,071	— 0,321
1,0	0,861	0,628	+ 0,132	3,0	1,372	0,054	— 0,354
1,1	0,921	0,576	+ 0,115	3,5	1,391	0,026	— 0,402
1,2	0,976	0,524	+ 0,094	4,0	1,401	0,013	— 0,432
1,3	1,026	0,474	+ 0,069	4,5	1,405	0,007	— 0,450
1,4	1,071	0,427	+ 0,041	5,0	1,408	0,003	— 0,459
1,5	1,111	0,383	+ 0,012	∞	1,410	0	— 0,470

Für die charakteristische Breite $2b^*$ des Strahles ergibt sich:

$$2 b^* = 6{,}19 \, k^{-\frac{1}{3}} \nu^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Die Durchflußmenge pro Schichthöhe Eins $q = \int_{-\infty}^{+\infty} u \, d y$ beträgt:

$$q = 3{,}42 \, (k \nu x)^{\frac{1}{3}},$$

sie ist also nicht wie beim runden Strahl vom Impuls des Strahles unabhängig.

Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen.

Von *N. Muschelišvili* in Tiflis.

In einigen früheren Arbeiten[1]) habe ich eine Methode zur Lösung der Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene entwickelt, welche auf einige elementare Eigenschaften des Cauchyschen Integrals und diejenigen der konformen Abbildung sich gründet. Diese Methode wurde zunächst nur in einem Sonderfalle angewendet, nämlich im Falle, daß die Abbildungsfunktion $\omega(\zeta)$ (siehe unten, Ziffer 4) rational ist[2]). In diesem Falle erscheint die Lösung in einer ganz elementaren und praktisch brauchbaren Form. Neuerdings ist es mir gelungen, mit dieser Methode die (theoretische) Lösung im allgemeinen Falle zu erhalten[3]) und damit die fundamentalen Existenzsätze zu geben (die im Falle des unendlichen Bereiches bisher fehlten). Diese Sätze (die unten ohne Beweis angeführt werden) ermöglichen die Methode auch im oben erwähnten Sonderfalle zu vereinfachen, da die Existenz und die Beschaffenheit der Lösung von vornherein bekannt sind. Andererseits haben mir Vorlesungen über einige ausgewählte Fragen der Elastizitätstheorie, die ich im Frühling 1931 auf Einladung des Seismologischen Institutes der Akademie der Wissenschaften der U. d. S. S. R. in Leningrad für die wissenschaftlichen Mitarbeiter des Institutes hielt, Anlaß gegeben, einige neue praktisch wichtige Fälle zu behandeln.

In diesem Aufsatze ist ein Teil der so erhaltenen Ergebnisse, die eine praktische Bedeutung haben können, dargestellt. Die Darstellungsweise ist so gewählt, daß die Kenntnis der anderen Arbeiten nicht erforderlich ist, wenn man einige einfache allgemeine Formeln und Sätze ohne Beweis annehmen will. Zugleich habe ich dafür gesorgt, die Beweise nur dann beiseite zu lassen, wenn sie in leicht zu beschaffenden Zeitschriften zu finden sind.

I. Zusammenfassung der allgemeinen Formeln und Sätze.

In diesem Abschnitte werden die allgemeinen Formeln und Sätze, die zur Lösung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie dienen, zusammengefaßt. Der Kürze wegen werden einige Ergebnisse ohne Beweis angeführt; eine ganz elementare und vollständige Darstellung kann man z. B. in meiner oben genannten Abhandlung „Recherches sur les problèmes aux limites etc.", die im folgenden kurz als „Recherches" zitiert wird, finden.

1. Komplexe Ausdrücke für Spannungs- und Verschiebungskomponenten. Bekanntlich lauten die Differentialgleichungen des ebenen Problems (im Falle des Gleichgewichtes, bei fehlenden Volumenkräften) wie folgt:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

$$\tau_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \ldots (2),$$

wobei $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ die Spannungskomponenten, u, v die Verschiebungskomponenten und λ, μ die elastischen Konstanten sind[4]) ($\lambda > 0$, $\mu > 0$).

Man kann zeigen, daß die allgemeinste Lösung der vorigen Gleichungen sich vermittels zweier analytischen Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ in folgender Weise darstellen läßt[5]):

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1}'(\bar z) - \overline{\psi_1}(\bar z) \quad \ldots \ldots \ldots (3),$$

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 2[\Phi_1(z) + \overline{\Phi}_1(\bar z)], \quad \tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2[\bar z\,\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)] \quad \ldots (4),$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi_1(z) = \varphi_1'(z), \quad \Psi_1(z) = \psi_1'(z) \quad \ldots (5) \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} > 1 \quad \ldots (6)$$

[1]) Sur l'intégration de l'équation biharmonique, Bull. de l'Acad. des Sc. de Russie, 1919, S. 663; Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathémat., Tiflis, 1922. Vgl. auch den Aufsatz von I. Malkin: Über einige neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Elastizitätslehre, ZAMM, **10**, Nr. 2. 1930, in dem einige Ergebnisse der genannten Arbeiten referiert sind.

[2]) Ähnliche Fälle wurden schon früher von E. Almansi (Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, **13**, 1899) und T. Boggio (Atti d. R. Accademia di Torino **35**, 1900; Atti d. R. Ist. Veneto, **61**$_2$, 1901—1902) nach einer ganz anderen Methode betrachtet. Unsere Methode ist viel einfacher und allgemeiner.

[3]) Comptes Rendus, Paris, **192**, 1931 (SS. 77 und 221). Eine ausführliche Darstellung dieser Ergebnisse ist in dem Aufsatze „Recherches sur les problèmes aux limites usw." Math. Ann. **107**, 1932, S. 282—312, enthalten.

[4]) Bei ebener Verzerrung sind λ und μ Lamésche Konstanten. Im Falle einer dünnen Platte jedoch muß man die Lamésche Konstante λ durch eine andere Konstante, nämlich durch $\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$, ersetzen.

[5]) Vgl. z. B. „Recherches", § 9.

gesetzt ist; außerdem bezeichnet in allgemeiner Weise $\overline{\varphi}(\overline{z})$ die analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $\overline{z} = x - i y$, welche aus $\varphi(z)$ durch Ersetzung von i durch $-i$ entsteht[6]). Die äußerst einfachen und wichtigen Formeln (3) und (4) wurden (in einer etwas anderen Bezeichnungsweise) zuerst von G. Kollossoff aufgestellt[7]).

Die wohlbekannte Airysche Spannungsfunktion U, die mit den Spannungskomponenten durch die Gleichungen $\tau_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\tau_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ verknüpft ist, wird in folgender Weise durch φ_1 und ψ_1 dargestellt:

$$2U = \overline{z}\,\varphi_1(z) + z\,\overline{\varphi}_1(\overline{z}) + \psi_2(z) + \overline{\psi}_2(\overline{z}) \quad . \; . \; . \quad (7), \qquad \psi_2 = \int \psi_1(z)\,dz \quad . \; . \; . \quad (7\,\mathrm{a}).$$

Aus dieser Formel folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_1(z) + z\,\overline{\varphi}_1'(\overline{z}) + \overline{\psi}_1(\overline{z}),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \overline{\varphi}_1(\overline{z}) + \overline{z}\,\varphi_1'(z) + \psi_1(z) \quad . \; . \; . \quad (8).$$

Abb. 1.

Es sei ein mit einem positiven Durchlaufssinn versehener Kurvenbogen $A\,B$ vorgegeben und ν sei die nach rechts gerichtete Normale dieser Kurve (Abb. 1). Bezeichnet man mit $\tau_x(\nu)\,ds$, $\tau_y(\nu)\,ds$ oder schlechthin mit $\tau_x ds$, $\tau_y ds$ die Komponenten der auf das Bogenelement ds, von der Seite der Normalen ν, wirkenden Spannung, so hat man, wie eine ganz elementare Rechnung zeigt[8]),

$$(\tau_x + i\,\tau_y)\,ds = -i\,d\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -i\,d\left[\varphi_1(z) + z\,\overline{\varphi}_1'(\overline{z}) + \overline{\psi}_1(\overline{z})\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Alsdann wird der resultierende Vektor (X, Y) der auf $A\,B$ wirkenden Spannung durch die Formel

$$X + i\,Y = \int_A^B (\tau_x + i\,\tau_y)\,ds = -i\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B = -i\left[\varphi_1(z) + z\,\overline{\varphi}_1'(\overline{z}) + \overline{\psi}_1(\overline{z})\right]_A^B \quad . \; . \quad (10)$$

gegeben, wobei $[\;]_A^B$ den Zuwachs des Klammerausdruckes beim Fortschreiten längs $A\,B$ bedeutet. Endlich wird das resultierende Moment M_0 (in bezug auf O) diese Spannungen durch die Formel[9])

$$M_0 = -\left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B + \left[U\right]_A^B = \left[\Re\left(\psi_2(z) - z\,\psi_1(z) - z\,\overline{z}\,\varphi_1'(z)\right)\right]_A^B \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

gegeben [$\Re$ = reeller Teil).

Anmerkung. Ist $A\,B$ ein Randstück des vom elastischen Körper besetzten (zweidimensionalen) Bereiches, so gibt die Formel (9) die auf das Randelement wirkende äußere Spannung; dabei soll man den Durchlaufssinn von $A\,B$ so wählen, daß der elastische Körper links bleibt.

Bisher haben wir stillschweigend angenommen, daß $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ überall stetig sind. Erleiden diese Funktionen in einem Punkte C des Randes endliche Sprünge, sind aber in der Umgebung dieses Punktes (im Bereiche des elastischen Körpers) eindeutig und stetig, so ist der Punkt C als Angriffspunkt einer Einzelkraft anzusehen. In der Tat, schneiden wir aus dem Körper die Umgebung des Punktes C durch einen unendlich kleinen Halbkreis $C'\,D\,C''$ (Abb. 1) aus, so wird die Resultierende der Spannungen, die auf $C'\,D\,C''$ wirken, auf Grund der Formel (10), gleich $-i\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{C'}^{C''}$. Durch Grenzübergang erhält man eine Einzelkraft (X_c, Y_c), die durch die Formel

$$X_c + i\,Y_c = -i\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10\,\mathrm{a})$$

gegeben ist, wobei $[\;]_C$ den Sprung des Klammerausdruckes beim Übergang über C (in positiver Richtung) bedeutet.

[6]) D. h. ist $\varphi(z) = p(x, y) + i\,q(x, y)$, so wird $\overline{\varphi}(\overline{z}) = p(x, y) - i\,q(x, y)$.

[7]) G. Kolossoff, Doktor-Dissertation (russisch), Dorpat, 1909; Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie, Zeitschr. für Math. u. Phys., **62**, 1914.

[8]) Vgl. z. B. „Recherches", § 9.

[9]) Vgl. „Recherches", § 9.

Ist außerdem die Funktion U im Punkte $C(x_c, y_c)$ stetig, so wird in C kein Einzelpaar Sitz haben. In der Tat zeigt die Formel (11), daß das resultierende Moment der Spannungen, die auf $C' D C''$ wirken, in der Grenze gleich $-x_c \left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_C - y_c \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C = x_c Y_c - y_c X_c$ wird; das ist aber das Moment der Einzelkraft (X_c, Y_c) in bezug auf O; infolgedessen gibt es in C kein Einzelpaar mit endlichem Moment.

2. Grad der Bestimmtheit der eingeführten Funktionen. Bei vorgegebenem Spannungsfelde (d. h. bei vorgegebenen $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$) wird nach der ersten Gl. (4) der reelle Teil vom $\Phi_1(z)$ vollständig bestimmt. Infolgedessen wird die Funktion $\Phi_1(z)$ selbst bis auf eine rein imaginäre Konstante $C i$ und die Funktion $\varphi_1(z)$ bis auf den additiven Ausdruck $C i z + \alpha + i\beta$ bestimmt. Die zweite Formel (4) zeigt dann, daß $\Psi_1(z)$ vollständig und, folglich, $\psi_1(z)$ bis auf eine Konstante $\alpha' + i\beta'$ bestimmt ist.

Ersetzt man also $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ durch

$$\varphi_1(z) + C i z + \alpha + i\beta \quad \text{bzw.} \quad \psi_1(z) + \alpha' + i\beta' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

so bleibt der Spannungszustand unverändert. Dagegen, wie es aus (3) unmittelbar folgt, werden u und v durch $u + u_0$ bzw. $v + v_0$ ersetzt, wobei

$$u_0 = -\frac{\varkappa + 1}{2\mu} C y + \frac{\varkappa\alpha - \alpha'}{2\mu}, \quad v_0 = \frac{\varkappa + 1}{2\mu} C x + \frac{\varkappa\beta + \beta'}{2\mu} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

ist. Der Verschiebungszustand (u_0, v_0) ist, wie die vorigen Formeln zeigen (und wie es von vornherein klar ist), eine einfache starre (infinitesimale) Verrückung des ganzen Körpers[10].

Ist infolgedessen das Verschiebungsfeld vorgeschrieben, so sind nicht mehr alle fünf Konstanten $C, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ verfügbar; man kann nur eins der Paare: α, β oder α', β' willkürlich wählen.

3. Analytische Eigenschaften der eingeführten Funktionen. Es sei $\mathfrak{S}$ der mit dem elastischen Körper besetzte (zweidimensionale) Bereich.

Wir nehmen an, daß die Spannungs- und Verschiebungskomponenten in $\mathfrak{S}$ eindeutig und regulär sind; ist der Bereich $\mathfrak{S}$ unendlich, so nehmen wir weiter an, daß die Spannungskomponenten auch im Unendlichen beschränkt bleiben.

Im folgenden werden wir nur den Fall betrachten, daß der Bereich $\mathfrak{S}$ von einer einzigen geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt ist. Dieser Bereich kann sowohl endlich (Innenraum der Kurve $\mathfrak{C}$) als auch unendlich sein (Außenraum der Kurve $\mathfrak{C}$; der Fall einer durchlochten unendlichen Platte).

Es ist klar, daß alle oben angeführten Funktionen der komplexen Veränderlichen z eindeutig und holomorph in $\mathfrak{S}$ werden, falls dieser Bereich endlich ist.

Ist aber $\mathfrak{S}$ unendlich, so läßt sich zeigen[11], daß, wenn man den Koordinatenursprung außerhalb $\mathfrak{S}$ (d. h. innerhalb $\mathfrak{C}$) nimmt,

$$\varphi_1(z) = (B + i C) z - \frac{X + i Y}{2\pi(\varkappa + 1)} \log z + \varphi_1{}^0(z), \quad \psi_1(z) = (B' + i C') z + \frac{\varkappa(X - i Y)}{2\pi(\varkappa + 1)} \log z + \psi_1{}^0(z) \ldots \quad (14),$$

wird; dabei sind: (X, Y) der resultierende Vektor der auf $\mathfrak{C}$ wirkenden äußeren Spannungen, B, C, B', C' — reelle Konstanten und $\varphi_1{}^0$, $\psi_1{}^0$ Funktionen, die im ganzen $\mathfrak{S}$ (einschließlich des Punktes $z = \infty$) holomorph sind. D. h., die Funktionen $\varphi_1{}^0$ und $\psi_1{}^0$ haben bei hinreichend großem $|z|$ die Form:

$$\varphi_1{}^0(z) = \alpha + i\beta + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{z} + \frac{\alpha_2 + i\beta_2}{z^2} + \ldots, \quad \psi_1{}^0(z) = \alpha' + i\beta' + \frac{\alpha_1' + i\beta_1'}{z} + \frac{\alpha_2' + i\beta_2'}{z^2} + \ldots \quad (15).$$

Aus (14) und (15) folgt, daß die Funktionen $\Phi_1(z) = \varphi_1'(z)$ und $\Psi_1(z) = \psi_1'(z)$ in $\mathfrak{S}$ einschließlich des unendlich fernen Punktes holomorph sind und bei großem $|z|$ die Form

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z) &= B + i C - \frac{X + i Y}{2\pi(\varkappa + 1)} \frac{1}{z} - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{z^2} + \ldots, \\ \Psi_1(z) &= B' + i C' + \frac{\varkappa(X - i Y)}{2\pi(\varkappa + 1)} \frac{1}{z} - \frac{\alpha_1' + i\beta_1'}{z^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

haben.

[10]) Tatsächlich ist eine infinitesimale (ebene) Verrückung eines starren Körpers durch die bekannten kinematischen Formeln $\delta x = -r y + a$, $\delta y = +r x + b$ gegeben, wobei r den Drehungswinkel und (a, b) die Verschiebung des Koordinatenursprunges bedeutet.

[11]) Vgl. „Recherches", § 10.

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in (4) zeigt, daß bei $z = \infty$, $\tau_{xx} = 2B - B'$, $\tau_{yy} = 2B + B'$, $\tau_{xy} = C'$ wird. Dann zeigen die wohlbekannten Formeln: $\tau_{xx} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$, $\tau_{yy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$, $\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha$, wobei σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen bezeichnen und α den Winkel zwischen Ox-Achse und der Hauptspannungsachse von σ_1, daß

$$B = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}, \quad B' = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha, \quad C' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

ist, wobei für σ_1, σ_2 und α ihre Werte bei $z = \infty$ zu nehmen sind.

Die Konstanten B, B', C' haben also eine einfache physikalische Bedeutung.

Anderseits zeigen die Formeln (3) und (14), daß die Rotation $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ bei $z = \infty$ den Wert $\frac{(\varkappa + 1)\,C}{2\,\mu}$ annimmt, so daß

$$C = \frac{2\,\mu\,\varepsilon}{\varkappa + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\text{a})$$

ist, wobei ε den Wert der Rotation im Unendlichen bezeichnet.

Bei vorgegebenem Spannungsfelde kann man immer (Ziffer 2) annehmen, daß $C = 0$ ist.

Es sei nun das Moment M_0 der äußeren Spannungen, die auf $\mathfrak{C}$ wirken, berechnet. Die Formel (11), welche auf die ganze geschlossene Linie $\mathfrak{C}$ anzuwenden ist[12]), gibt unmittelbar:

$$M_0 = 2\,\pi\,\beta_1', \quad \text{d. h.} \quad \beta_1' = \frac{M_0}{2\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Bemerkung. Die Einsetzung der Ausdrücke (14) in (3) zeigt unmittelbar, daß die Verschiebungen erst dann im Unendlichen beschränkt werden, wenn $B = C = B' = C' = X = Y = 0$ wird. In diesem Falle werden die Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ auch bei $z = \infty$ holomorph. Es ist insbesondere hervorzuheben, daß die Verschiebungen nicht beschränkt sein können, wenn der resultierende Vektor der äußeren Spannungen, die auf dem Rand $\mathfrak{C}$ wirken, von 0 verschieden ist.

4. Konforme Abbildung und die zugehörigen krummlinigen Koordinaten. Bekanntlich kann man immer den Bereich $\mathfrak{S}$ durch eine Relation von der Form

$$z = \omega(\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

auf den Einheitskreis $|\zeta| < 1$ der ζ-Ebene eindeutig und konform abbilden. Ist $\mathfrak{S}$ endlich, so wird $\omega(\zeta)$ im Einheitskreise holomorph; ist $\mathfrak{S}$ unendlich, so hat $\omega(\zeta)$ in diesem Kreise nur einen einzigen einfachen Pol, der dem Punkte $z = \infty$ entspricht; ohne die Allgemeinheit zu vermindern, kann man immer annehmen, daß dieser Pol im Mittelpunkte $\zeta = 0$ des Einheitskreises sich befindet.

Ist weiter, wie wir annehmen wollen, die Randkurve $\mathfrak{S}$ genügend „glatt", so werden $\omega(\zeta)$ und $\omega'(\zeta)$ einschließlich des Randes stetig (mit eventueller Ausnahme des Punktes $\zeta = 0$) und $\omega'(\zeta) \neq 0$.

Setzen wir $\zeta = \varrho\, e^{i\vartheta}$, so werden ϱ und ϑ die polaren Koordinaten in der ζ-Ebene. Den Kreislinien $\varrho =$ Konst. und den Strahlen $\vartheta =$ Konst. entsprechen in der z-Ebene gewisse Linien, die wir ebenfalls mit $\varrho =$ Konst. und $\vartheta =$ Konst. bezeichnen werden. Die Linien $\varrho =$ Konst. sind geschlossene Linien, die den Punkt $z_0 = \omega(0)$ umkreisen[13]), die Linien $\vartheta =$ Konst. beginnen alle in diesem Punkte und münden am Rande $\mathfrak{C}$. Diese Linien (die augenscheinlich zwei zueinander orthogonale Familien bilden) wollen wir als Koordinatenlinien in der z-Ebene wählen.

Wir werden die Linien $\vartheta =$ Konst. als ϱ-Linien, die Linien $\varrho =$ Konst. als ϑ-Linien bezeichnen; die Tangenten an diese Kurven (die im Sinne der wachsenden bezüglichen Parameter ϱ oder ϑ geleitet sind) werden wir (ϱ)-Achse bzw. (ϑ)-Achse nennen.

Es sei $\mathfrak{v}$ ein Vektor in der z-Ebene mit dem Angriffspunkte (ϱ, ϑ) und es seien v_ϱ und v_ϑ seine Komponenten in bezug auf die Achsen $(\varrho), (\vartheta)$. Es wird augenscheinlich: $v_\varrho + i\,v_\vartheta = (v_x + i\,v_y)\,e^{-i\alpha}$, wobei v_x und v_y die kartesischen Komponenten vom $\mathfrak{v}$ sind und α der Winkel zwischen Ox und (ϱ)-Achse.

[12]) Man darf nicht vergessen, daß bei Umlauf von $\mathfrak{C}$ der Bereich $\mathfrak{S}$ links bleiben muß; d. h. der Umlaufssinn wird demjenigen des Uhrzeigers gleich. Dabei wird der Zuwachs von $\log z$ gleich $(-2\,\pi\,i)$ und derjenige von $\log \bar{z}$ gleich $+2\,\pi\,i$.

[13]) Im Falle, daß $\mathfrak{S}$ unendlich ist, wird $z_0 = \infty$.

Man beweist leicht, daß[14])

$$e^{i\alpha}=\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\zeta}{\varrho}, \quad e^{-i\alpha}=\frac{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\bar{\zeta}}{\varrho} \quad \ldots \quad (20)$$

und folglich:

$$v_\varrho+i\,v_\vartheta=\frac{\bar{\zeta}}{\varrho}\frac{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|}(v_x+i\,v_y) \quad \ldots \quad (21)$$

ist. Alsdann ergibt die Formel (3) für die Komponenten v_ϱ, v_ϑ der Verschiebung:

$$2\,\mu\,|\omega'(\zeta)|\,(v_\varrho+i\,v_\vartheta)=\frac{\bar{\zeta}}{\varrho}\,\overline{\omega}'(\bar{\zeta})\left\{\varkappa\,\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\overline{\varphi}'(\bar{\zeta})-\overline{\psi}(\bar{\zeta})\right\} \quad \ldots \quad (22),$$

wobei

$$\varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta)), \quad \psi(\zeta)=\psi_1(\omega(\zeta)) \quad \ldots \quad (23)$$

ist. Für die Spannungskomponenten $\tau_{\varrho\varrho}, \tau_{\vartheta\vartheta}, \tau_{\varrho\vartheta}$ in bezug auf die Achsen (ϱ), (ϑ) ergibt sich ohne Schwierigkeit[14]):

$$\tau_{\varrho\varrho}+\tau_{\vartheta\vartheta}=2\,[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi}(\bar{\zeta})], \quad \tau_{\vartheta\vartheta}-\tau_{\varrho\varrho}+2\,i\,\tau_{\varrho\vartheta}=\frac{2\,\zeta^2}{\varrho^2\,\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}[\overline{\omega}(\bar{\zeta})\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)] \quad \ldots \quad (24),$$

wobei die Bezeichnungen eingeführt sind:

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(\omega(\zeta))=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta)=\Psi_1(\omega(\zeta))=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad \ldots \quad (25).$$

Die Formeln (21) und (23) sind schon in meinen früheren Abhandlungen (a. a. O.) aufgestellt und angewendet worden[15]). Analoge Formeln sind von G. Kolossoff noch früher (a. a. O.) angegeben; das Koordinatensystem ist aber bei G. Kolossoff ein anderes.

Aus (23) erhält man unmittelbar durch Subtraktion

$$\tau_{\varrho\varrho}-i\,\tau_{\varrho\vartheta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi}(\bar{\zeta})-\frac{\zeta^2}{\varrho^2\,\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}[\overline{\omega}(\bar{\zeta})\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)] \quad \ldots \quad (26).$$

Im Falle eines unendlichen $\mathfrak{S}$ wird es vorteilhafter (aber nicht notwendig), diesen Bereich anstatt auf dem Innenraum $|\zeta|\leq 1$ des Einheitskreises, auf dem Außenraum $|\zeta|>1$ abzubilden, und zwar so, daß die Punkte $z=\infty$ und $\zeta=\infty$ sich gegenseitig entsprechen. Dann wird, wie es aus den elementaren Eigenschaften der konformen Abbildung folgt, bei hinreichend großem $|\zeta|$:

$$\omega(\zeta)=R\,\zeta+C_0+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_2}{\zeta^2}+\ldots \quad \ldots \quad (27),$$

wobei R, C_0, C_1 usw. (im allgemeinen komplexe) Konstanten sind. In großer Entfernung wird also der Verlauf der Linien ϱ und ϑ dem Verlaufe der entsprechenden Linien (Strahlen und Kreise) in der ζ-Ebene ähnlich.

In diesem Falle geben augenscheinlich die Gl. (14):

$$\varphi(\zeta)=(B+i\,C)\,R\,\zeta-\frac{X+i\,Y}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\varphi^0(\zeta), \quad \psi(\zeta)=(B'+i\,C')\,R\,\zeta+\frac{\varkappa(X-i\,Y)}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\psi^0(\zeta) \quad (28),$$

wobei $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ außerhalb des Einheitskreises holomorph sind (mit Einschluß des Punktes $\zeta=\infty$). Wie schon gesagt, kann man ohne Änderung des Spannungszustandes $C=0$ nehmen.

5. Einige Sätze über das Cauchysche Integral. Unsere Methode gründet sich auf folgenden einfachen Sätzen über das Cauchysche Integral:

1°. Es sei γ die Kreislinie $|\zeta|=1$ und $f(\vartheta)$, $\varphi(\vartheta)$ zwei stetige reelle Funktionen des Bogens ϑ von γ. Wenn für jeden Punkt ζ innerhalb γ die Gleichung

$$\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma \frac{\varphi\,d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad \ldots \quad (A)$$

gilt (wobei $\sigma=e^{i\vartheta}$ einen laufenden Punkt auf γ bedeutet), so wird notwendig: $f(\vartheta)=\varphi(\vartheta)$[16]).

1°a. Gilt die Gl. (A) für alle Punkte ζ außerhalb γ, so wird $f(\vartheta)=\varphi(\vartheta)+$ Konst.

---

[14]) Vgl. „Recherches", § 13.

[15]) Ohne meine Arbeiten zu kennen, benutzt E. Kohl (diese Zeitschr. Bd. **10**, 1930, S. 141 ff.) das im Text angeführte System der krummlinigen Koordinaten. Seine Formeln sind aber viel verwickelter als die oben angegebenen.

[16]) Dieser Satz in einer allgemeineren (nicht ganz korrekten) Fassung stammt von A. Harnack (Math. Ann. Bd. 35, 1889, S. 1—18).

Wir beginnen mit dem Beweis des Satzes 1°a. Da in diesem Falle $|\zeta| > \sigma$ ist, so gilt die Entwicklung: $\frac{1}{\sigma-\zeta} = -\frac{1}{\zeta} - \frac{\sigma}{\zeta^2} - \frac{\sigma^2}{\zeta^3} - \ldots$. Trägt man diese in (A) ein und vergleicht die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von ζ, so erhält man (da $\sigma = e^{i\vartheta}$, $d\sigma = i\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta = i\,\sigma\,d\vartheta$ ist):

$$\int_\gamma f(\vartheta)\,\sigma^n\,d\sigma = \int_\gamma \varphi(\vartheta)\,\sigma^n\,d\sigma\,(n=0,1,2\ldots) \quad \text{oder}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,[\cos(n+1)\,\vartheta + i\sin(n+1)\,\vartheta]\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\,[\cos(n+1)\,\vartheta + i\sin(n+1)\,\vartheta]\,d\vartheta\,;$$

es folgt daraus, daß alle Fourier-Koeffizienten von $f(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$, mit eventueller Ausnahme des ersten, einander gleich sind; infolgedessen ist die Differenz $f - \varphi$ konstant. Der Beweis des Satzes 1° ist ganz analog. Man muß nur die Integrale nach positiven Potenzen von ζ entwickeln und erhält dann, daß alle Fourier-Koeffizienten von f und φ einander gleich sind.

2°. Aus 1° (bzw. 1°a) folgt unmittelbar, daß wenn vier stetige reelle Funktionen $f_1(\vartheta)$, $f_2(\vartheta)$, $\varphi_1(\vartheta)$, $\varphi_2(\vartheta)$ beide Bedingungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 - i f_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma$$

erfüllen, wobei ζ ein willkürlicher Punkt innerhalb (bzw. außerhalb) γ ist, $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$ (bzw. $f_1 = \varphi_1 +$ Konst., $f_2 = \varphi_2 +$ Konst.) ist.

3°. Ist $f(\zeta)$ eine innerhalb γ holomorphe Funktion mit Ausnahme des Punktes $\zeta = 0$, wobei sie einen Pol mit dem Hauptteile $a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + \ldots + a_n\zeta^{-n}$ besitzen kann, so wird, wenn ζ einen Punkt innerhalb γ bedeutet,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = f(\zeta) - \frac{a_1}{\zeta} - \frac{a_2}{\zeta^2} - \ldots - \frac{a_n}{\zeta^n}.$$

4°. Ist $f(\zeta)$ eine außerhalb γ holomorphe Funktion, die nur bei $\zeta = \infty$ einen Pol mit dem Hauptteil[17]) $a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n$ haben kann, so wird, wenn ζ einen Punkt innerhalb γ bedeutet:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n.$$

5°. Ist $f(\zeta)$ außerhalb γ holomorph, mit Ausnahme des Punktes $\zeta = \infty$, wobei sie einen Pol mit dem Hauptteil $a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n$ haben kann, so wird, wenn ζ einen Punkt außerhalb γ bedeutet:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = -f(\zeta) + a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n.$$

6°. Ist $f(\zeta)$ innerhalb γ holomorph, mit Ausnahme des Punktes $\zeta = 0$, wobei sie einen Pol mit dem Hauptteil $a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + \ldots + a_n\zeta^{-n}$ haben kann, so wird, wenn ζ außerhalb γ ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{a_1}{\zeta} - \frac{a_2}{\zeta} - \ldots - \frac{a_n}{\zeta^n}.$$

Da der Beweis der Sätze 3°—6° ganz analog und durchaus elementar verläuft, so begnügen wir uns mit dem Beweise des Satzes 5°. Die Funktion $f_0(\zeta) = f(\zeta) - a_0 - a_1\zeta - \ldots - a_n\zeta^n$ ist außerhalb γ holomorph und hat bei $\zeta = \infty$ die Form: $\frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \ldots$. Schlägt man um O einen Kreis Γ mit großem Radius R und wendet den Cauchyschen Lehrsatz auf den kreisringförmigen Bereich zwischen γ und Γ an, so erhält man:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{f_0(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = f_0(\zeta) = f(\zeta) - a_0 - a_1\zeta - \ldots - a_n\zeta^n,$$

wobei γ^* die im negativen Sinne durchlaufene Kreislinie γ bedeutet[18]). Es ist anderseits

[17]) Wir schließen das konstante Glied in den Hauptteil ein.

[18]) Es sei daran erinnert, daß bei Anwendung des Cauchyschen Satzes der Rand so durchlaufen werden muß, daß der zu betrachtende Bereich links bleibt.

klar, daß das längs Γ genommene Integral bei wachsendem R zu 0 strebt. Bemerkt man ferner, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{f_0(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_0(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{a_0+\ldots+a_n\zeta^n}{\sigma-\zeta}\,d\sigma$$

ist und daß das letzte Integral verschwindet (da der Integrand innerhalb γ holomorph ist), so ist unser Satz bewiesen.

II. Die erste Randwertaufgabe.

6. Lösungsmethode der I. Randwertaufgabe. Unter der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie verstehen wir das Problem der Bestimmung des Spannungszustandes, wenn die auf den Rand $\mathfrak{C}$ wirkenden äußeren Spannungen vorgegeben sind, d. h.

$$\tau_x=F_1(s),\quad \tau_y=F_2(s)\ (\text{auf } \mathfrak{C}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29),$$

wobei $F_1(s)$ und $F_2(s)$ vorgegebenen Funktionen des Bogens s der Randkurve $\mathfrak{C}$ sind.

Im Falle, daß $\mathfrak{S}$ endlich ist, wird natürlich vorausgesetzt, daß der resultierende Vektor und das resultierende Moment der vorgegebenen äußeren Spannungen Null sind. Ist $\mathfrak{S}$ unendlich, so werden diese Bedingungen überflüssig. Man muß aber in diesem Falle die im Unendlichen wirkenden (konstanten) Spannungen als vorgegeben denken, d. h. voraussetzen, daß die Konstanten σ_1, σ_2 und α oder, was dasselbe bedeutet, die Konstanten B, B', C', vorgegeben sind.

Es läßt sich zeigen, daß unter gewissen allgemeinen Stetigkeitsbedingungen bezüglich des Randes $\mathfrak{C}$ und der Funktionen F_1 und F_2, dieses Problem eine (einzige) Lösung besitzt[19]). Will man, im Falle des unendlichen $\mathfrak{S}$, daß die Verschiebungen auch im Unendlichen beschränkt bleiben, so muß man voraussetzen, daß $B=C=B'=C'=X=Y=0$ ist (vgl. das Ende der Ziff. 3).

Die Formel (9) zeigt, daß die Randbedingungen (29) durch die folgende ersetzt werden können:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=i\int_{s_0}^{s}(F_1+iF_2)\,ds+\text{Konst}=f_1(s)+if_2(s) \quad \ldots\ldots \quad (30),$$

wobei die Konstante und auch s_0 willkürlich zu fixieren sind; f_1 und f_2 werden dann gegebene Funktionen von s. Nach den Formeln (8) kann die vorige Randbedingung in einer der folgenden Formen geschrieben werden:

$$\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1}'(\bar z)+\overline{\psi_1}(\bar z)=f_1+if_2,\quad \overline{\varphi_1}(\bar z)+\bar z\varphi_1'(z)+\psi_1(z)=f_1-if_2\ (\text{auf } \mathfrak{C}) \quad \ldots \quad (31).$$

Diese beiden Formeln sind völlig gleichwertig, es ist aber zweckmäßig, beide zu schreiben, wie es weiter unten klar wird.

Führt man nun die komplexe Veränderliche ζ durch die Gleichung $z=\omega(\zeta)$ ein (Ziff. 4), so nehmen die vorigen Bedingungen die Form an:

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi}'(\bar\sigma)+\overline{\psi}(\bar\sigma)=f_1+if_2,\quad \overline{\varphi}(\bar\sigma)+\frac{\overline{\omega}(\bar\sigma)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=f_1-if_2\ (\text{auf } \gamma) \quad . \quad (32),$$

wobei, wie früher, $\varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta))$, $\psi(\zeta)=\psi_1(\omega(\zeta))$ gesetzt ist, γ den Einheitskreis bedeutet und $\sigma=e^{i\vartheta}$ der laufende Punkt auf γ ist. Weiter sind jetzt f_1 und f_2 als vorgegebene Funktionen von ϑ zu betrachten, welche den Werten von $f_1(s)$ und $f_2(s)$ in entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}$ gleich sind.

Die Bedingungen (32) können noch weiter transformiert werden. Zunächst kann man die erste Gl. (32) mit einem Faktor p, und die zweite mit dem konjugierten Faktor $\bar p$ multiplizieren. Wir können z. B. für p ein Polynom $p(\sigma)$ nehmen, das auf γ nicht verschwindet. Weiter kann man die beiden Seiten von (32) mit $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ multiplizieren und längs γ integrieren; dabei bedeutet ζ einen inneren oder äußeren Punkt in bezug auf γ, je nachdem die Abbildung auf dem Innenraum oder Außenraum des Einheitskreises geschieht. Man erhält schließlich:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{p(\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{p(\sigma)\omega(\sigma)\overline{\varphi}'(\bar\sigma)\,d\sigma}{\overline{\omega}'(\bar\sigma)(\sigma-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{p(\sigma)\overline{\psi}(\bar\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1+if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \quad (33),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{p}(\bar\sigma)\overline{\varphi}(\bar\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{p}(\bar\sigma)\overline{\omega}(\bar\sigma)\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{p}(\bar\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1-if_2}{\sigma-\zeta} \quad . \quad . \quad (34).$$

[19]) Vgl. „Recherches", § 12.

Die beiden letzten Gleichungen sind, auf Grund der Ziff. 5, 2° völlig gleichwertig mit den Ausgangsbedingungen (32) im Falle der Abbildung auf dem Innenraum von γ und wenn, folglich, ζ ein innerer Punkt ist. Im Falle der Abbildung auf dem Außenraum, wird aus (33) und (34) nur folgen, daß die Gl. (32) bis auf eine Konstante erfüllt sind, was für unseren Zweck durchaus genügt.

Die Integralgleichungen (33), (34) führen, im allgemeinen Falle, auf ein System von Integralgleichungen Fredholmschen Typus und geben eine vollständige (theoretische) Lösung der aufgestellten Aufgabe[20]). Aber in einigen wichtigen Sonderfällen ergibt sich die Lösung in einer elementaren und praktisch durchaus brauchbaren Form. Das geschieht nämlich immer, wenn $\omega(\zeta)$ eine rationale Funktion ist. Wir werden das zunächst an einigen typischen Beispielen zeigen.

7. Vorbemerkungen. Ist $\mathfrak{S}$ endlich, so sollen, wie schon erwähnt, der resultierende Vektor und das resultierende Moment der äußeren Spannungen Null sein.

Die erste Bedingung besagt einfach, auf Grund der Formel (10), daß die Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ bei vollständigem Umlauf längs $\mathfrak{C}$ zu ihren ursprünglichen Werten zurückkehren müssen, d. h. f_1 und f_2 sollen auf $\mathfrak{C}$ eindeutig sein. Die zweite Bedingung besagt: $0=\int\limits_{\mathfrak{C}}(xF_2-yF_1)\,ds$. Man hat aber: $F_1\,ds=df_2$, $F_2\,ds=-df_1$, und nach einer teilweisen Integration nimmt diese Bedingung die Form an:

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}(f_1\,dx+f_2\,dy)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Im Falle eines endlichen $\mathfrak{S}$ werden wir immer die Abbildung auf dem Innenraum von γ benützen und annehmen, daß $\omega(0)=0$ ist, was augenscheinlich die Allgemeinheit nicht beschränkt. Dann werden (Ziffer 3) die Funktionen $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ innerhalb γ holomorph und man kann (Ziffer 2) von vornherein $\varphi(0)=0$ annehmen, was eine passende Wahl der willkürlichen Konstanten α und β bedeutet. Durch eine passende Wahl der Konstanten C (Ziffer 2) kann man auch den imaginären Teil von $\varphi_1'(0)=\dfrac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$ zu Null machen. Demgemäß wird im Falle des endlichen $\mathfrak{S}$ immer angenommen[21]):

$$\varphi(0)=0,\quad \Re\frac{1}{i}\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}=0\ (\Re=\text{Reeller Teil}) \quad \ldots\ldots \quad (36).$$

Im Falle des unendlichen $\mathfrak{S}$ werden wir die Abbildung auf dem Außenraum von γ benutzen. Die Beschaffenheit der Funktionen $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ wird dann durch die Formel (28) (Ziffer 4) angegeben. Wir werden annehmen (was immer gestattet ist), daß

$$C=0,\quad \varphi^0(\infty)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36\text{a}).$$

Es sei noch folgendes bemerkt: Ist $f(\zeta)$ eine Funktion, welche holomorph innerhalb γ (und stetig auf γ) ist, so wird man haben: $f(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots$ (innerhalb γ). Die Funktion $\bar f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ wird außerhalb γ durch die Gleichung $\bar f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\bar a_0+\bar a_1\frac{1}{\zeta}+\bar a_2\frac{1}{\zeta^2}+\ldots$ definiert. Da auf γ $\bar\sigma=e^{-i\vartheta}=\dfrac{1}{\sigma}$ ist, so werden die Randwerte von $\bar f(\zeta)$ und $\bar f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ einander gleich; diese Randwerte werden durch $\bar f(\bar\sigma)$ und $\bar f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ bezeichnet, so daß $\bar f(\bar\sigma)=\bar f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ wird.

Insbesondere wird nach Ziffer 5, 4°:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\bar f(\bar\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\bar f\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\bar a_0=\bar f(0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

wobei ζ einen Punkt innerhalb γ bedeutet.

Ist $f(\zeta)$ außerhalb γ holomorph, so wird $f(\zeta)=a_0+a_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}+\ldots$ (außerhalb γ), und es wird daher $\bar f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\bar a_0+\bar a_1\zeta+\bar a_2\zeta^2$ holomorph innerhalb γ und $\bar f\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\bar f(\bar\sigma)$.

[20]) Siehe „Recherches" oder Comptes Rendus, Paris, **192**, 1931, S.S. 77 und 221.

[21]) Nach der Fixierung der Konstanten in (30) ist es nicht mehr gestattet, α' und β' (Ziffer 2), d. h. $\psi(0)$, willkürlich zu fixieren.

8. Die Lösung der ersten Randwertaufgabe für eine Kreisscheibe. Dieser Fall wurde vielfach nach verschiedenen Methoden betrachtet[22]). Wir können ihn aber nicht beiseite lassen, da er sehr wichtig und typisch ist. Auch wird eine Vergleichung mit anderen Methoden erleichtert. Ist R der Radius der Scheibe, so kann man annehmen: $z = \omega(\zeta) = R\,\zeta$.

Die Randbedingungen (32) nehmen die Form an:

$$\varphi(\sigma) + \sigma\,\overline{\varphi}'(\overline{\sigma}) + \overline{\psi}(\overline{\sigma}) = f_1 + i f_2, \quad \overline{\varphi}(\overline{\sigma}) + \overline{\sigma}\,\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = f_1 - i f_2,$$

oder, wenn man $\overline{\sigma} = e^{-i\vartheta}$ durch $\dfrac{1}{\sigma}$ ersetzt:

$$\varphi(\sigma) + \sigma\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = f_1 + i f_2, \quad \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\,\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = f_1 - i f_2 \quad \ldots \quad (38),$$

$\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ sind holomorph innerhalb γ. Es sei[23])

$$\varphi(\zeta) = \alpha_1\zeta + (\alpha_2 + i\beta_2)\zeta^2 + \ldots, \quad \psi(\zeta) = \alpha' + i\beta' + (\alpha_1' + i\beta_1')\zeta + \ldots \text{ (innerhalb } \gamma).$$

Dann wird:

$$\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{\zeta^2} + \ldots, \quad \overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \alpha' - i\beta' + \frac{\alpha_1' - i\beta_1'}{\zeta} + \ldots, \quad \zeta\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \alpha_1\zeta + 2(\alpha_2 - i\beta_2) + \ldots$$

(außerhalb γ).

Endlich wird $\dfrac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta)$ innerhalb γ holomorph, außer dem Punkte $\zeta = 0$, wobei sie einen Pol mit dem Hauptteil $\dfrac{\alpha_1}{\zeta}$ hat.

Multipliziert man nun die Gl. (38) mit $\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ (wir nehmen $p(\sigma) = 1$) und integriert längs γ, so erhält man fast ohne Rechnung:

$$\varphi(\zeta) + \alpha_1\zeta + 2(\alpha_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta' = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma, \quad \frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta) - \frac{\alpha_1}{\zeta} + \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 - i f_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma \quad (39).$$

In der Tat ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = \varphi(\zeta) \text{ (Cauchyscher Lehrsatz)}; \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \alpha_1\zeta + 2(\alpha_2 - i\beta_2)$$

(Ziffer 5, 4°);

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{\psi}(0) = \alpha' - i\beta' \text{ (Ziff. 5, 4° oder Formel (37))}; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{\varphi}(0) = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \varphi'(\zeta) - \frac{\alpha_1}{\zeta} \text{ (Ziffer 5, 3°)}; \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = \psi(\zeta).$$

Die Formeln (39) ergeben

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \alpha_1\zeta - 2(\alpha_2 - i\beta_2) - (\alpha' - i\beta'), \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 - i f_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta) + \frac{\alpha_1}{\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (40).$$

Zur Bestimmung der Konstanten α_1, $2(\alpha_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta'$ machen wir zunächst $\zeta = 0$ in der ersten Formel (40); wir erhalten:

$$2(\alpha_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta' = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f_1 + i f_2)\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1 + i f_2)\,d\vartheta \quad \ldots \quad (41).$$

[22]) Wir erwähnen nur eine Lösung, die von G. Kolossoff und mir gegeben wurde, die derjenigen des Textes ähnlich ist; sie gibt aber unmittelbar die Funktionen $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ (Annalen des Elektrotechnischen Instituts Petersburg, XII, 1915, Russisch).

[23]) Vgl. die Formel (36).

Dann differenzieren wir dieselbe Formel und machen wieder $\zeta = 0$; wir erhalten:

$$\varphi'(0) = a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f_1 + i f_2)\frac{d\sigma}{\sigma^2} - a_1,$$

daraus ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4\pi i}\int_\gamma (f_1 + i f_2)\frac{d\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f_1 + i f_2)\, e^{-i\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f_1\cos\vartheta + f_2\sin\vartheta)\, d\vartheta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}(-f_1\sin\vartheta + f_2\cos\vartheta)\, d\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42).$$

Das Problem ist also nur dann möglich, wenn

$$\int_0^{2\pi}(-f_1\sin\vartheta + f_2\cos\vartheta)\, d\vartheta = 0, \qquad \text{oder} \qquad \int_{\mathfrak{C}}(f_1\, dx + f_2\, dy) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

ist, was von vornherein zu erwarten war (Ziffer 7, Formel (35)).

Die vollständige Lösung unseres Problems ist also durch die Formeln (40) geliefert, wobei statt $2(a_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta'$ und a_1 ihre Werte (41) und (42) einzutragen sind. Da man eine additive Konstante in $\varphi(\zeta)$, ohne Änderung des Spannungszustandes, immer unterdrücken kann, so ist die Lösung auch in der Form darstellbar:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \zeta}\, d\sigma - a_1\zeta, \qquad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 - i f_2}{\sigma - \zeta}\, d\sigma - \frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta) + \frac{a_1}{\zeta} \quad . \; . \; . \quad (44),$$

wobei

$$a_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_\gamma (f_1 + i f_2)\frac{d\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f_1 + i f_2)\, e^{-i\vartheta}\, d\vartheta = -\frac{1}{4\pi i}\int_\gamma (f_1 + i f_2)\, d\bar{\sigma} \quad . \; . \; . \; . \quad (45)$$

ist, unter Voraussetzung der Bedingung (43).

Beispiel: Durch Einzelkräfte beanspruchte Kreisscheibe[24]). Wir können immer $R = 1$ annehmen, und dann wird einfach $z = \zeta$. Es seien die Punkte $\sigma_1 = x_1 + i y_1 = e^{\alpha_1 i}$, ..., $\sigma_n = x_n + i y_n = e^{\alpha_n i}$ $(0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2\pi)$ des Randes γ durch die Einzelkräfte (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) beansprucht. Dann wird $f_1 + i f_2$ auf jedem der Bogen $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$, ..., $\sigma_n\sigma_1$ konstant sein und bei Übergang durch die Punkte σ_k Sprünge erleiden: in σ_k nach Ziffer 1, Gl. (10a), wird der Sprung gleich $i(X_k + i Y_k)$. Wir können annehmen, daß $f_1 + i f_2 = 0$ auf $\sigma_n\sigma_1$ ist. Dann werden die Werte von $f_1 + i f_2$ wie folgt auf γ gegeben:

Bogen:	$\sigma_n\sigma_1$	$\sigma_1\sigma_2$	...	$\sigma_{n-1}\sigma_n$	$\sigma_n\sigma_1$
$f_1 + i f_2$:	0	$i(X_1 + i Y_1)$	...	$i(X_1 + i Y_1) + \ldots i(X_{n-1} + Y_{n-1})$	$i(X_1 + i Y_1) + \ldots + i(X_n + i Y_n)$

Damit bei Durchgang durch σ_n der Ausdruck $f_1 + i f_2$ seinen ursprünglichen Wert 0 auf $\sigma_n\sigma_1$ annehme, muß sein: $\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0$, was von vornherein klar war.

Man hat ferner:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \zeta}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n}^{\sigma_1} = \frac{X_1 + i Y_1}{2\pi}\log\frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta} + \frac{(X_1 + i Y_1) + (X_2 + i Y_2)}{2\pi}\log\frac{\sigma_3 - \zeta}{\sigma_2 - \zeta}$$

$$+ \ldots + \frac{(X_1 + i Y_1) + \ldots + (X_n + i Y_n)}{2\pi}\log\frac{\sigma_1 - \zeta}{\sigma_n - \zeta} \text{ (das letzte Glied ist Null, da } \sum X_k = \sum Y_k = 0 \text{ ist).}$$

Nach augenscheinlichen Vereinfachungen erhält man ferner:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \zeta}\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\{(X_1 + i Y_1)\log(\sigma_1 - \zeta) + \ldots + (X_n + i Y_n)\log(\sigma_n - \zeta)\};$$

[24]) Eine Lösung dieses Problems war von J. H. Michell (Proc. of the London Math. Soc., 32, 1901) gegeben. Unsere Lösung ist, wie wir glauben, viel einfacher.

und ganz analog:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1 - i f_2}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi}\{(X_1 - i Y_1)\log(\sigma_1 - \zeta) + \ldots + (X_n - i Y_n)\log(\sigma_n - \zeta)\}.$$

Es bleibt nur die Konstante α_1 zu berechnen. Man kann dafür die Formel (45) anwenden oder noch einfacher so verfahren: da $\alpha_1 = \varphi'(0)$ sein muß, so gibt die erste Formel (44), wenn man das Integral durch den oben gefundenen Ausdruck ersetzt, nach ζ differenziert und dann $\zeta = 0$ macht:

$$2\alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k + i Y_k}{\sigma_k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k + i Y_k)\,\bar\sigma_k.$$

Damit das möglich sei, soll, da α_1 reell ist, der rechte Teil ebenfalls reell sein; also muß $\Sigma(x_k Y_k - y_k X_k) = 0$ sein, d. h. das resultierende Moment der äußeren Kräfte soll verschwinden, was von vornherein klar war.

Nun geben die Gl. (44) die vollständige Lösung des Problems:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k + i Y_k)\log(\sigma_k - \zeta) - \frac{\zeta}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k + i Y_k)\,\bar\sigma_k,$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k - i Y_k)\log(\sigma_k - \zeta) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k + i Y_k)\,\bar\sigma_k}{\sigma_k - \zeta}.$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß die Spannungsfunktion U auf γ stetig ist. Damit wird gezeigt, daß keine Einzelmomente vorhanden sind.

Die Berechnung der Spannungen und Verschiebungen geschieht durchaus auf elementarem Wege nach der Formel (3) und (4). Ein Beispiel analoger Berechnung wird unten angeführt. Im Falle $n = 2$ sind die Spannungen von J. H. Michell (a. a. O.) berechnet worden[25].

Es ist auch sehr leicht, die Lösung für den Fall zu finden, daß die Einzelkräfte nicht nur am Rande, sondern auch in inneren Punkten wirken. Dann muß man nur die Funktionen $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ mit geeigneten Singularitäten versehen.

9. Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Außenraum einer Ellipse und für die geschlitzte Vollebene. Nimmt man

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad \ldots \quad (46), \qquad \text{d. h.} \quad x = R\left(\varrho + \frac{m}{\varrho}\right)\cos\vartheta,\ y = R\left(\varrho - \frac{m}{\varrho}\right)\sin\vartheta \quad (47),$$

wobei R und $m < 1$ positive Konstanten sind, so erhält man die Abbildung des Außenraumes der Ellipse, deren parametrische Gleichungen $x = R(1+m)\cos\vartheta$, $y = R(1-m)\sin\vartheta$ sind, auf den Außenraum $|\zeta| \geq 1$ des Einheitskreises; die Halbachsen der Ellipse sind $R(1+m)$ und $R(1-m)$. Ist $m = 1$, so haben wir eine geschlitzte Vollebene vor uns.

Die Randbedingungen (32), wenn man überall $\bar\sigma$ durch σ^{-1} ersetzt, nehmen die Gestalt an:

$$\varphi(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}\bar\varphi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar\psi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = f_1 + i f_2, \qquad \bar\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = f_1 - i f_2 \quad (48).$$

Nehmen wir zunächst an, daß in der Formel (28) $B = B' = C' = X = Y = 0$ ist (es wird immer $C = 0$ genommen).

Dann werden $\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta)$ und $\psi(\zeta) = \psi^0(\zeta)$ außerhalb γ holomorph, und zwar (vgl. die Formel (36a)):

$$\varphi(\zeta) = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta} + \ldots, \qquad \psi(\zeta) = \alpha' + i\beta' + \frac{\alpha_1' + i\beta'}{\zeta} + \ldots \text{ (außerhalb } \gamma).$$

Infolgedessen wird $\zeta\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\varphi'(\zeta)$ ebenfalls holomorph außerhalb γ und verschwindet bei $\zeta = \infty$; dagegen werden $\bar\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\bar\psi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ und $\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta^2 + m}{1 - m\zeta^2}\bar\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ innerhalb γ holomorph.

[25] Auf einem anderen Wege sind die Spannungen und Verschiebungen in der oben zitierten, gemeinsam mit G. Kolossoff publizierten Arbeit berechnet.

Multipliziert man die Gl. (48) mit $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, wobei ζ außerhalb γ ist und integriert längs γ, so ergibt sich

$$-\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1+if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma,\quad -\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta)-\psi(\zeta)+\alpha'+i\beta'=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1-if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma;$$

in der Tat:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\varphi(\zeta)\,(\text{Ziff. }5,5^0),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\,\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0\,(\text{Ziff. }5,6^0),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma\,\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\,\varphi'(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\zeta\,\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\varphi'(\zeta)\,(\text{Ziffer }5,5^0)$$

und endlich $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\psi(\zeta)+\alpha'+i\beta'$ (Ziffer 5, 5⁰).

Da die Konstante $\alpha'+i\beta'$ unterdrückt werden kann, so erhält man die endgültigen äußerst einfachen Formeln[26]):

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1+if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma,\quad \psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1-if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma-\zeta\,\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\varphi'(\zeta)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (49).$$

Sind die Konstanten X, Y, B, B', C' nicht Null, so hat man nach Formel (28)

$$\varphi(\zeta)=BR\zeta-\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\varphi^0(\zeta),\quad \psi(\zeta)=(B'+iC')R\zeta+\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\psi^0(\zeta)\quad (50),$$

wobei B, B' und C' durch Formel (17) gegeben sind und, nach Formel (10),

$$X+iY=-i\left[f_1+if_2\right]_A^A\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (51)$$

ist, wobei $\left[f_1+if_2\right]_A^A$ den Zuwachs von f_1+if_2 bedeutet, wenn man die Ellipse $\mathfrak{E}$ bzw. die Kreislinie γ, ausgehend aus einem Punkt A beschreibt und nach A zurückkehrt (die Umkreisung soll in dem Drehungssinne des Uhrzeigers geschehen).

Die Funktionen $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ werden durch die Formel (49) gegeben, wobei aber $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ durch $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ zu ersetzen sind und, nach der Formel (48), statt f_1+if_2 der Ausdruck

$$f_1^0+if_2^0=f_1+if_2-BR\left\{\sigma+\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\right\}-\frac{(B'-iC')R}{\sigma}+\frac{X+iY}{2\pi}\log\sigma+\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\quad (52)$$

gesetzt werden muß.

Der Fall des kreisförmigen Loches ist ein Sonderfall des oben betrachteten, der durch $m=0$ charakterisiert ist.

Macht man $m=1$, so erhält man die Lösung für die geschlitzte Vollebene. Rückt man ein oder beide Enden des Schlitzes ins Unendliche, so ergibt sich die Lösung für die Ebene, die längs einer Halbgeraden geschlitzt ist, bzw. für die geradlinig begrenzte Halbebene. Für diesen letzten Fall ist die Lösung von G. Kolossoff (a. a. O.) gegeben und kürzlich auf einem anderen Wege von M. Sadowsky (diese Ztschr. Bd. **10**, 1930, S. 77) wiedergefunden.

Beispiele. 1⁰. Zug einer Platte mit einem elliptischen Loch. Es sei der Rand des Loches spannungsfrei und die Platte im Unendlichen dem Zug p unterworfen, dessen Richtung den Winkel α mit der Ox-Achse bildet. Dann wird $X=Y=0$ und nach (17) (wobei $\sigma_1=p$, $\sigma_2=0$ zu setzen ist), muß $B=\frac{p}{4}$, $B'-iC'=-\frac{p}{2}(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)=-\frac{p}{2}e^{2i\alpha}$ genommen werden.

[26]) Gleichwertige und auch sehr einfache Formeln wurden von mir schon im Aufsatze „Sur l'intégration de l'équation biharmonique" (a. a. O.) gegeben. Dort wird nur die Abbildung auf den Innenraum von γ angewendet.

Es wird also, nach (49):

$$\varphi^0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1^0 + i f_2^0}{\sigma - \zeta}\, d\sigma, \quad \psi^0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1^0 - i f_2^0}{\sigma - \zeta}\, d\sigma - \zeta\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\,\varphi^{0\prime}(\zeta),$$

wobei

$$f_1^0 + i f_2^0 = -\frac{pR}{4}\left(\sigma + \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)}\right) + \frac{pR\,e^{2i\alpha}}{2\sigma}, \quad f_1^0 - i f_2^0 = -\frac{pR}{4}\left(\frac{1}{\sigma} + \sigma\,\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m}\right) + \frac{pR\,e^{-2i\alpha}\sigma}{2}.$$

Wir bemerken, daß $\frac{\zeta^2 + m}{\zeta(1 - m\zeta^2)}$ holomorph innerhalb γ ist, außer dem Punkte $\zeta = 0$, wo sie den Pol mit dem Hauptteil $m\zeta^{-1}$ hat; die Funktion $\zeta\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}$ ist außerhalb γ holomorph, außer dem Punkt $\zeta = \infty$, wo ihr Hauptteil $m\zeta$ ist.

Alsdann wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} = -\frac{1}{\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{m}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma\,\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\zeta\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} + m\zeta = -\frac{(1 + m^2)\zeta}{\zeta^2 - m}$$

und die vorigen Formeln geben:

$$\varphi^0(\zeta) = -\frac{m p R}{4\zeta} + \frac{pR\,e^{2i\alpha}}{2\zeta} = \frac{pR(2e^{2i\alpha} - m)}{4\zeta}, \quad \psi^0(\zeta) = -\frac{pR}{4\zeta} - \frac{pR(1 + m^2)\zeta}{4(\zeta^2 - m)} - \zeta\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\,\varphi^{0\prime}(\zeta)$$

und endlich, nach (50)

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{4}\left(\zeta + \frac{2e^{2i\alpha} - m}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = -\frac{pR}{2}\left(e^{-2i\alpha}\zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{m\zeta} - \frac{(1 + m^2)(e^{2i\alpha} - m)\zeta}{m(\zeta^2 - m)}\right) \quad . \; . \; . \quad (53).$$

Die gestellte Aufgabe ist gelöst[27]). Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten berechnen sich auf ganz elementare Weise nach der Formel (24) bzw. (22).

Wir wollen nur die Summe der Hauptspannungen, d. h. $\tau_{\varrho\varrho} + \tau_{\vartheta\vartheta}$, berechnen. Nach der ersten Formel (24) wird $\tau_{\varrho\varrho} + \tau_{\vartheta\vartheta} = 4\,\Re\,\Phi(\zeta)$, wobei, nach den vorhergehenden Formeln,

$$4\,\Phi(\zeta) = \frac{4\,\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = p\,\frac{\zeta^2 + m - 2e^{2i\alpha}}{\zeta^2 - m} = p\,\frac{(\varrho^2 e^{2i\vartheta} + m - 2e^{2i\alpha})(\varrho^2 e^{-2i\vartheta} - m)}{(\varrho^2 e^{2i\vartheta} - m)(\varrho^2 e^{-2i\vartheta} - m)}$$

ist. Der Nenner ist reell und gleich $\varrho^4 - 2m\varrho^2\cos 2\vartheta + m^2$. Der reelle Teil des Zählers ist $p\,[\varrho^4 - m^2 - 2\varrho^2\cos(\vartheta - \alpha) + 2m\cos 2\alpha]$. Es wird also:

$$\tau_{\varrho\varrho} + \tau_{\vartheta\vartheta} = p\,\frac{\varrho^4 - 2\varrho^2\cos(\vartheta - \alpha) - m^2 + 2m\cos 2\alpha}{\varrho^4 - 2m\varrho^2\cos 2\vartheta + m^2}.$$

Am Rande, d. h. bei $\varrho = 1$, ist $\tau_{\varrho\varrho}$ Null, und diese Formel ergibt die Randwerte von $\tau_{\vartheta\vartheta}$:

$$\tau_{\vartheta\vartheta} = p\,\frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\alpha - 2\cos(\vartheta - \alpha)}{1 - 2m\cos 2\vartheta + m^2}.$$

Diese Formel stimmt mit derjenigen von T. Pöschl überein (a. a. O.), wenn man dort einen Druckfehler beseitigt und unsere Bezeichnungen einführt.

Im Falle eines allseitigen Zuges $q\left(\sigma_1 = \sigma_2 = q,\; B = \frac{q}{2},\; B' = C' = 0\right)$ erhält man auf dieselbe Weise, oder durch Überlagerung von zwei Zügen q in den Richtungen α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$:

$$\varphi(\zeta) = \frac{qR}{2}\left(\zeta - \frac{m}{\zeta}\right), \qquad \psi(\zeta) = -\frac{qR(1 + m^2)\zeta}{\zeta^2 - m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53\text{a}).$$

2°. Elliptisches Loch, dessen Rand einem gleichmäßigen normalen Druck unterworfen ist[28]). In diesem Falle wird, wenn P den Wert des Druckes bezeichnet:

$$F_1(s) = \tau_x = -P\cos(r, x), \quad F_2(s) = \tau_y = -P\cos(r, y), \quad (F_1 + iF_2)\,ds = -P(dy - i\,dx) = P\,i\,dz.$$

[27]) Man vergleiche die angeführte Lösungsmethode mit denjenigen von Th. Pöschl (Math. Ztschr., **11**, 1921, S. 89—96) und L. Föppl (diese Ztschr. Bd. **11**, 1931, S. 88—92). Vgl. auch meine Lösung in Math. Ztschr. **26**, 1927, S. 700.

[28]) Im Unendlichen sind die Spannungen gleich 0 vorausgesetzt.

Es wird also, unter Weglassung der willkürlichen Konstanten:

$$f_1 + i f_2 = i \int (F_1 + i F_2)\, ds = -P z = -P R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) \text{ und } f_1 - i f_2 = -P R\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right).$$

Mit diesen Werten geben die Formeln (49), fast ohne Rechnung,

$$\varphi(\zeta) = -\frac{P R m}{\zeta}, \qquad \psi(\zeta) = -\frac{P R}{\zeta} - \frac{P R m}{\zeta}\cdot\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}$$

und die Aufgabe ist gelöst. Wir wollen die Spannungen und Verschiebungen für den Fall $m = 1$ berechnen, d. h. den Fall eines geradlinigen Schlitzes (Abb. 2). Die Formeln (22) und (24) geben nach elementaren Rechnungen:

$$\tau_{\varrho\varrho} = -P + \frac{P(\varrho^2 - 1)^3(\varrho^2 + 1)}{(\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2\vartheta + 1)^2}, \quad \tau_{\vartheta\vartheta} = -P + \frac{P(\varrho^4 - 1)(1 + 2\varrho^2 + \varrho^4 - 4\varrho^2\cos 2\vartheta)}{(\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2\vartheta + 1)^2},$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{2 P \varrho^2 (1 - \varrho^2)^2 \sin 2\vartheta}{(\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2\vartheta + 1)^2},$$

$$v_\varrho = -\frac{P R}{2\mu\varrho}\cdot\frac{(1+\varkappa)\varrho^2\cos 2\vartheta + 1 - \varkappa - 2\varrho^2}{\sqrt{\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2\vartheta + 1}}, \qquad v_\vartheta = \frac{P R \varrho}{2\mu}\cdot\frac{(\varkappa - 1)\sin 2\vartheta}{\sqrt{\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2\vartheta + 1}}.$$

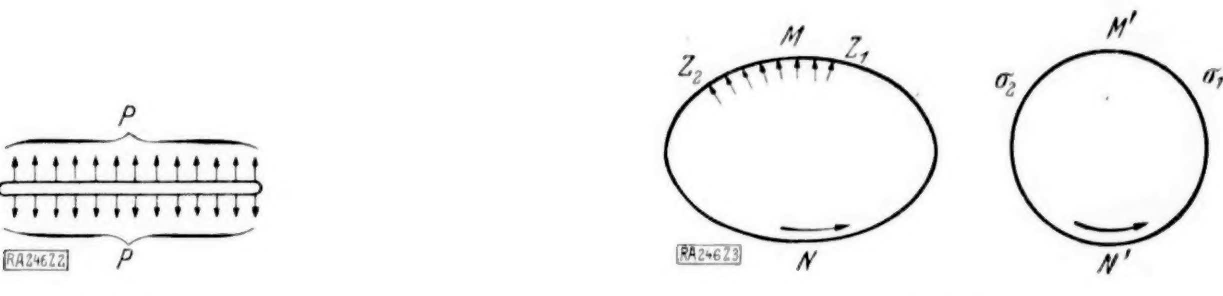


Abb. 2. Abb. 3.

3°. **Elliptisches Loch, dessen Rand einer gleichmäßigen Schubspannung T unterworfen ist**[29]. In diesem Falle wird $(F_1 + i F_2)\, ds = T(dx + i\, dy) = T\, dz$ und $f_1 + i f_2 = i T R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)$. Man erhält wie oben:

$$\varphi(\zeta) = \frac{T R m i}{\zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{T R i}{\zeta} + \frac{T R m i}{\zeta}\cdot\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}.$$

4°. **Elliptisches Loch (bzw. geradliniger Schlitz), dessen Randstück einem gleichmäßigen Druck unterworfen ist**[29]. Nehmen wir nun an, daß nur ein Stück $z_1 M z_2$ des Randes einem konstanten Druck P unterworfen ist (Abb. 3).

Wir haben in diesem Falle (vgl. Beispiel 2°)

$$f_1 + i f_2 = -P z = -P R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) (\text{auf } z_1 M z_2) \text{ und } f_1 + i f_2 = -P z_2 \ (\text{auf } z_2 N z_1).$$

Die Funktion $f_1 + i f_2$ wird also, bei Rückkehr nach z_1, den Zuwachs $-P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$ bekommen; dabei bedeuten z_1 und z_2 den Anfangs- bzw. den Endpunkt des belasteten Bogens bei Fortschreiten in dem auf Abb. 3 angegebenen Sinne.

Nach (52) haben wir

$$f_1^0 + i f_2^0 = f_1 + i f_2 + \frac{X + iY}{2\pi}\log\sigma + \frac{X - iY}{2\pi(\varkappa + 1)}\cdot\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} = f_1 + i f_2 - \frac{P(z_1 - z_2)}{2\pi i}\log\sigma + \frac{P(\bar z_1 - \bar z_2)}{2\pi i(\varkappa + 1)}\cdot\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2},$$

da nach (51) $X + iY = i P(z_1 - z_2)$ ist[30]. In dieser Formel soll der Zweig von $\log\sigma$ so gewählt werden, daß er auf γ überall, außer σ_1, stetig sei (σ_1 und σ_2 bezeichnen die Punkte von γ, welche den Punkten z_1 und z_2 entsprechen). Bei Umkreisung längs γ wird $\log\sigma$ um $+2\pi i$ vermehrt, und deshalb wird σ_1 kein Unstetigkeitspunkt der Funktion $f_1^0 + i f_2^0$. Demzufolge wird in z_1 keine Einzelkraft erscheinen.

[29]) Im Unendlichen sind die Spannungen gleich 0 vorausgesetzt.
[30]) Man beachte, daß der in der Formel (51) gemeinte Fortschreitungssinn der Sinn der Uhrzeigerdrehung ist.

Man hat nun $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ nach der Formel (49) zu bestimmen (wobei $f_1^0, f_2^0, \varphi^0, \psi^0$ statt f_1, f_2, φ, ψ zu setzen sind). Es wird

$$\varphi^0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1^0 + i f_2^0}{\sigma - \zeta}\, d\sigma = \frac{P R}{2\pi i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{P z_2}{2\pi i}\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

$$+ \frac{P(z_1 - z_2)}{2\pi i}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log\sigma\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{P(\bar z_1 - \bar z_2)}{2\pi i(1+\varkappa)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\sigma^2 + m)}{(1 - m\sigma^2)}\,\frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)}.$$

Es ist aber:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \sigma_2 - \sigma_1 - \frac{m}{\zeta}\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)\log\frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta}.$$

Statt $\log\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ kann man hier $i(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ schreiben, wobei ϑ_2 und ϑ_1 die Argumente von σ_2 und σ_1 sind. Ferner

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \log\frac{\sigma_1 - \zeta}{\sigma_2 - \zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\sigma^2 + m)\, d\sigma}{(1 - m\sigma^2)(\sigma - \zeta)} = 0 \text{ (nach Ziffer 5, 6}^0\text{)}.$$

Es bleibt nur $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log\sigma\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = J(\zeta)$ zu berechnen. Man verfährt am einfachsten so:

$$\frac{dJ}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log\sigma\, d\sigma}{(\sigma - \zeta)^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\sigma\, d\frac{1}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\log\sigma}{\sigma - \zeta}\right]_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=\sigma_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} = -\frac{1}{\sigma_1 - \zeta} - \frac{1}{\zeta},$$

da, nach Ziffer 5, 6°, das letzte Integral gleich $-\zeta^{-1}$ ist. Es wird also: $J(\zeta) = \log(\sigma_1 - \zeta) - \log\zeta + \text{Konst.}$ Man erhält demgemäß, unter Weglassung einer additiven Konstanten

$$\varphi^0(\zeta) = \frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{mR}{\zeta}\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left[R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) - z_2\right]\log(\sigma_2 - \zeta) - \left[R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) - z_1\right]\log(\sigma_1 - z) - (z_1 - z_2)\log\zeta\right\},$$

wobei $z_1 = R\left(\sigma_1 + \frac{m}{\sigma_1}\right)$ und $z_2 = R\left(\sigma_2 + \frac{m}{\sigma_2}\right)$ sind.

In ganz ähnlicher Weise berechnet man $\psi^0(\zeta)$, und es ergibt sich nach einigen elementaren Vereinfachungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{mR}{\zeta}\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left[R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) - z_2\right]\log(\sigma_2 - \zeta) - \left[R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) - z_1\right]\log(\sigma_1 - \zeta) - \frac{\varkappa(z_1 - z_2)}{\varkappa + 1}\log\zeta\right\} \\ \psi(\zeta) &= \frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{R(1 + m^2)}{\zeta^2 - m}\zeta\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \bar z_1\log(\sigma_1 - \zeta) - \bar z_2\log(\sigma_2 - \zeta)\right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar z_1 - \bar z_2}{\varkappa + 1}\log\zeta + R(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} - \frac{(z_1 - z_2)(1 + m^2)}{(\varkappa + 1)(\zeta^2 - m)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (54).$$

Ist der ganze Rand belastet, so wird $z_1 = z_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2\pi i$ und man erhält wieder den Fall 2°.

Läßt man anderseits z_2 gegen z_1 streben, so, daß der belastete Bogen gegen 0 strebt und gleichzeitig P unbegrenzt wachsen, so daß $\lim P\,|z_2 - z_1| = F$ endlich bleibt, so ergibt sich die Lösung für den Fall einer einzelnen Normalkraft F. Es ist aber leicht, diesen Fall wie auch den Fall ganz willkürlicher Einzelkräfte unmittelbar zu behandeln. Die Rechnungen und Ergebnisse sind kaum komplizierter als im Falle der Kreisscheibe.

10. Elementare Lösung für einige andere Bereiche. Wie schon gesagt, liefert die oben angeführte Methode eine Lösung in elementarer Form in allen Fällen, wenn $\omega(\zeta)$ eine rationale Funktion ist. Die allgemeine Behandlung dieser Fälle ist in meinen früheren oben zitierten Arbeiten gegeben und ist auch im Referate von I. Malkin[31]) zu finden. Es sei

[31]) Diese Ztschr. Bd. **10**, 1930, S.S. 191—193. Es sei nur bemerkt, daß im Falle des unendlichen $\mathfrak{S}$ es vorteilhafter ist, die Bedingungen $\frac{\partial U}{\partial x} = 0\left(\frac{1}{r}\right)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 0\left(\frac{1}{r}\right)$, $\Delta U = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (a. a. O. S. 191) durch die Forderung zu ersetzen, daß $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ im Unendlichen beschränkt bleiben. Dann soll man nur die Bedingung $\psi(0) = 0$ (a. a. O., S. 193) weglassen.

hier nur auf einige Sonderfälle hingewiesen. Der Ansatz $\omega(\zeta) = b(\zeta^n + a\zeta)$ ($|\zeta| \leq 1$, n-ganze Zahl > 1, $a \geq n$) führt zu dem Innenraum einer Epitrochoide; der Ansatz: $\omega(\zeta) = b(\zeta + a\zeta^{-n})\left(\zeta \geq 1, n\text{-ganze Zahl} > 0, 0 \leq a \leq \frac{1}{n}\right)$ führt zu dem Außenraum einer Hypotrochoide; der Ansatz: $\omega(\zeta) = \frac{b\zeta}{\zeta^2 + a}$ ($|\zeta| \leq 1$, $a > 1$) gibt den Innenraum einer Boothschen Lemniskate. Dieser Bereich bietet ein Interesse, weil, wenn a nahe zu 1 ist, er sich wenig vom Bereiche unterscheidet, der aus zwei sich berührenden Kreisen besteht. Endlich ergibt sich eine elementare Lösung für eine längs einem Kreisbogen geschlitzte Vollebene (dieser Bereich ist durch eine Inversion aus einer geradlinig geschlitzten Ebene erhaltbar).

III. Die zweite Randwertaufgabe.

11. Lösungsmethode der II. Randwertaufgabe. Unter der zweiten Randwertaufgabe verstehen wir das Problem der Bestimmung des Spannungszustandes bei vorgegebenen Werten der Verschiebungen am Rande. In diesem Falle haben die Randbedingungen die Form:

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s) \quad (\text{auf } \mathfrak{C}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55),$$

wobei $g_1(s)$ und $g_2(s)$ vorgegebene Funktionen von s sind.

Ist $\mathfrak{S}$ unendlich, so wird vorausgesetzt, daß die Größen X, Y, B, C, B', C' (Ziff. 3, Gl. 14) auch vorgegeben sind. Im allgemeinen werden wir $C = 0$ setzen, d. h. annehmen, daß der unendlich ferne Teil der elastischen Ebene nicht gedreht ist.

Es läßt sich zeigen, daß unter gewissen Stetigkeitsbedingungen dieses Problem immer eine (einzige) Lösung hat[32]).

Unter Anwendung der konformen Abbildung $z = \omega(\zeta)$ nehmen die Randbedingungen auf Grund der Formel (3) die Gestalt an:

$$\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2), \quad \text{oder } \varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu(g_1 - ig_2) \, (\text{auf } \gamma) \quad (56).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gl. (32), so sieht man, daß, vom Standpunkte unserer Methode, die zweite Randwertaufgabe mit der ersten soviel wie identisch ist. Es wird also die oben angeführte Methode fast ohne irgendeine Änderung anwendbar.

Wie in dem erwähnten Falle werden wir $\varphi(0) = 0$ bzw. $\varphi^0(\infty) = 0$ annehmen, je nachdem $\mathfrak{S}$ endlich[33]) oder unendlich ist.

12. Lösung der zweiten Randwertaufgabe für die Kreisscheibe. Da das Lösungsverfahren ganz identisch mit demjenigen von Ziffer 8 für die erste Randwertaufgabe ist, so sei hier nur das Endresultat angeführt:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\varphi(\zeta) &= \frac{2\mu}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_1 + ig_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma + (\alpha_1 - i\beta_1)\zeta + 2(\alpha_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta', \\ \psi(\zeta) &= -\frac{2\mu}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_1 - ig_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta) + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (57),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} 2(\alpha_2 - i\beta_2) + \alpha' - i\beta' &= -\frac{2\mu}{2\pi i}\int_\gamma (g_1 + ig_2)\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(g_1 + ig_2)\,d\vartheta, \\ (\varkappa^2 - 1)(\alpha_1 + i\beta_1) &= \frac{2\mu\varkappa}{2\pi i}\int_\gamma (g_1 + ig_2)\frac{d\sigma}{\sigma^2} + \frac{2\mu}{2\pi i}\int_\gamma (g_1 - ig_2)\,d\sigma \\ &= \frac{\mu\varkappa}{\pi}\int_0^{2\pi}(g_1 + ig_2)e^{-i\vartheta}\,d\vartheta + \frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(g_1 - ig_2)e^{i\vartheta}\,d\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (58).$$

---

[32]) Vgl. „Recherches“, § 12.

[33]) Hier können wir nicht wie bei der ersten Randwertaufgabe $\Re\,\frac{1}{i}\,\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)} = 0$ annehmen, da die Konstante C in (12) nicht mehr zur Verfügung steht.

13. Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Außenraum einer Ellipse und für die geschlitzte Vollebene. Die Randbedingungen in diesem Falle haben die Form (vgl. Ziffer 9):

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa\,\varphi(\sigma)-\frac{1}{\sigma}\,\frac{\sigma^2+m}{1-m\,\sigma^2}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=2\,\mu\,(g_1+i\,g_2),\\ &\varkappa\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\sigma\,\frac{1+m\,\sigma^2}{\sigma^2-m}\,\varphi'(\sigma)-\psi(\sigma)=2\,\mu\,(g_1-i\,g_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59).$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Verschiebungen im Unendlichen beschränkt bleiben, d. h. daß in den Formeln (28) $X=Y=B=B'=C=C'=0$ ist.

Dann erhält man, wie in Ziffer 9:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{2\,\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_\gamma\frac{g_1+i\,g_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma,\quad \psi(\zeta)=\frac{2\,\mu}{2\,\pi\,i}\int_\gamma\frac{g_1-i\,g_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma-\zeta\,\frac{1+m\,\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\varphi'(\zeta)+\alpha'+i\,\beta' \quad . \quad (60).$$

Läßt man die Konstante $\alpha'+i\,\beta'$ unbestimmt, so werden die Randbedingungen nur bis zu additiven Konstanten erfüllt. Zur Bestimmung der Konstante $\alpha'+i\,\beta'$ multiplizieren wir die zweite Gl. (59) mit $\frac{1}{2\,\pi\,i}\cdot\frac{d\,\sigma}{\sigma}$ und integrieren längs γ. Es ergibt sich unmittelbar:

$$\alpha'+i\,\beta'=-\frac{2\,\mu}{2\,\pi\,i}\int_\gamma(g_1-i\,g_2)\,\frac{d\,\sigma}{\sigma}=-\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(g_1-i\,g_2)\,d\,\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

und die Aufgabe ist gelöst (im Falle b e s c h r ä n k t e r Verschiebungen).

Im allgemeinen Falle verfahren wir wie in Ziffer 9. Nämlich, wir setzen wie früher:

$$\varphi(\zeta)=B\,R\,\zeta-\frac{X+i\,Y}{2\,\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\varphi^0(\zeta),\quad \psi(\zeta)=(B'+i\,C')\,R\,\zeta+\frac{\varkappa(X-i\,Y)}{2\,\pi(\varkappa+1)}\log\zeta+\psi^0(\zeta)\ .\ \ (50),$$

wobei $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ außerhalb γ holomorph sind (einschließlich des Punktes $\zeta=\infty$) und $\varphi^0(\infty)=0$.

Dann werden $\varphi^0(\zeta)$ und $\psi^0(\zeta)$ durch die Formel (60) gegeben, wobei aber, wie es die Gl. (59) zeigen, $2\,\mu\,(g_1+i\,g_2)$ und $2\,\mu\,(g_1-i\,g_2)$ bzw. durch

$$\left.\begin{aligned} &2\,\mu(g_1{}^0+i\,g_2{}^0)=2\,\mu(g_1+i\,g_2)-B\,R\left(\varkappa\,\sigma-\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\sigma^2+m}{1-m\,\sigma^2}\right)+\frac{(B'-i\,C')\,R}{\sigma}-\frac{X-i\,Y}{2\,\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{\sigma^2+m}{1-m\,\sigma^2},\\ &2\,\mu(g_1{}^0-i\,g_2{}^0)=2\,\mu(g_1-i\,g_2)-B\,R\left(\frac{\varkappa}{\sigma}-\sigma\,\frac{1+m\,\sigma^2}{\sigma^2-m}\right)+(B'+i\,C')\,R\,\sigma-\frac{X+i\,Y}{2\,\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{1+m\,\sigma^2}{\sigma^2-m} \end{aligned}\right\}(62)$$

zu ersetzen sind. Demzufolge erhält man (vgl. Ziffer 9, Beispiel 1°)

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^0(\zeta)=-\frac{2\,\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_\gamma\frac{g_1+i\,g_2}{\sigma-\zeta}+(B\,m+B'-i\,C')\,\frac{R}{\varkappa\,\zeta},\\ &\psi^0(\zeta)=\frac{2\,\mu}{2\,\pi\,i}\int_\gamma\frac{g_1-i\,g_2}{\sigma-\zeta}\,d\,\sigma+B\,R\left(\frac{\varkappa}{\zeta}-\frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2-m}\right)+\frac{X+i\,Y}{2\,\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{1+m^2}{\zeta^2-m}-\zeta\,\frac{1+m\,\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\varphi^{0\prime}(\zeta)+\alpha_0'+i\,\beta_0' \end{aligned}\right\}(63),$$

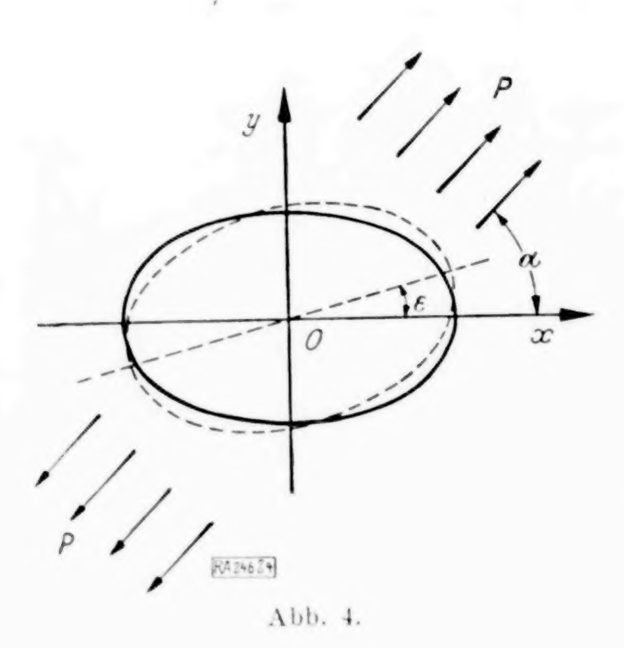


Abb. 4.

wobei, nach (61) und (62)

$$\begin{aligned} \alpha_0'+i\,\beta_0'&=-\frac{2\,\mu}{2\,\pi\,i}\int_\gamma(g_1{}^0-i\,g_2{}^0)\,\frac{d\,\sigma}{\sigma}\\ &=-\frac{2\,\mu}{2\,\pi\,i}\int_\gamma(g_1-i\,g_2)\,\frac{d\,\sigma}{\sigma}+\frac{m\,(X+i\,Y)}{2\,\pi(\varkappa+1)} \quad . \quad (64). \end{aligned}$$

Beispiele. 1°. Z u g e i n e r u n e n d l i c h e n P l a t t e m i t e i n e m s t a r r e n e l l i p t i s c h e n K o r n e. Es sei eine unendliche Platte, die ein starres eingelötetes elliptisches Korn enthält, einem Zug unterworfen, wie in der Ziffer 9, Beispiel 1°. Es wird angenommen, daß a u f d a s

Korn außer den Spannungen des umgebenden Materials keine Kräfte wirken. Mit den Bezeichnungen der Ziffer 9 (Beispiel 1°) werden wir $B = \frac{p}{4}$, $B' - i\,C' = -\frac{p}{2}\,e^{2\,i\,\alpha}$ haben. Der Zug kann eine Translation und Drehung des Kornes bewirken. Da die Translation durch eine Verschiebung der z-Ebene beseitigt werden kann, so werden wir annehmen, daß nur eine Drehung des Kornes Platz hat und bezeichnen mit ε den vorläufig unbekannten (unendlich kleinen) Drehungswinkel. Alsdann werden die Randwerte der Verschiebungen durch die Formeln gegeben: $g_1 = -\varepsilon\,y$, $g_2 = \varepsilon\,x$, d. h. es wird

$$g_1 + i\,g_2 = i\,\varepsilon\,z = i\,\varepsilon\,R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right), \quad g_1 - i\,g_2 = -i\,\varepsilon\,R\left(\frac{1}{\sigma} + m\,\sigma\right).$$

Da ferner

$$\frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_{\gamma}\frac{g_1 + i\,g_2}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = i\,\varepsilon\,R\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_{\gamma}\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{i\,\varepsilon\,R\,m}{\zeta}, \quad \frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_{\gamma}\frac{g_1 - i\,g_2}{\sigma - \zeta} = \frac{i\,\varepsilon\,R}{\zeta}$$

und, nach (64), $\alpha_0' = \beta_0' = 0$ ist, so geben die Formeln (63) und (50) (wobei $X = Y = 0$ zu setzen ist):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= B\,R\,\zeta + (2\,\mu\,m\,\varepsilon\,i + B\,m + B' - i\,C')\,\frac{R}{\varkappa\,\zeta}, \\ \psi(\zeta) &= (B' + i\,C')\,R\,\zeta + \frac{2\,\mu\,\varepsilon\,R\,i}{\zeta} + B\,R\left(\frac{\varkappa}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2 - m}\right) \\ &\quad + (2\,\mu\,m\,\varepsilon\,i + B\,m + B' - i\,C')\,\frac{1 + m\,\zeta^2}{\zeta^2 - m}\cdot\frac{R}{\varkappa\,\zeta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Es bleibt nur übrig, den Winkel ε zu bestimmen mittels der Bedingung, daß das resultierende Moment M_0 der Randspannungen 0 ist. Dieses Moment werden wir mit Hilfe der Formel (11) berechnen. Da in unserem Falle $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ und, folglich, $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ eindeutig sind, so wird dieses Moment $M_0 = \left[\Re\,\psi_2(z)\right]_A^A$. Es ist deshalb nötig, die mehrdeutigen Glieder der Funktion $\Re\,\psi_2 = \Re\int^{z}\psi_1(z)\,d\,z = \Re\int^{\zeta}\psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,d\,\zeta$ zu bestimmen. Die zweite Formel (65) zeigt, daß diese mehrdeutigen Glieder sind:

$$\Re\left\{i\,2\,\mu\,\varepsilon\,R^2\left(1 + \frac{m^2}{\varkappa}\right)\log\zeta - i\,m\,R^2\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right)C'\,\log\zeta\right\}.$$

Man hat folglich[34])

$$M_0 = 4\,\pi\,\mu\,\varepsilon\,R^2\left(1 + \frac{m^2}{\varkappa}\right) - 2\,\pi\,m\,R^2\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right)C'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Da $M_0 = 0$ sein muß, so ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{m\,(1+\varkappa)\,C'}{2\,\mu\,(m^2 + \varkappa)} = \frac{p\,m\,(1+\varkappa)\sin 2\,\alpha}{4\,\mu\,(m^2+\varkappa)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Im Falle eines kreisförmigen Kornes ($m = 0$) wird die Drehung selbstverständlich Null. Im Falle eines gestreckten Kornes (d. h. bei $m = 1$), ist $\varepsilon = \frac{p}{4\,\mu}\sin 2\,\alpha$ — ein experimentell sehr leicht prüfbares Ergebnis.

Im Falle eines allseitigen Zuges ($B = \frac{q}{2}$, $B' = C' = 0$) ergibt sich unmittelbar aus (65), da augenscheinlich hier $\varepsilon = 0$ wird:

$$\varphi(\zeta) = \frac{q}{2}\,R\left(\zeta + \frac{m}{\varkappa\,\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = \frac{q\,R}{2}\left(\frac{\varkappa}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2 - m} + \frac{1 + m\,\zeta^2}{\zeta^2 - m}\cdot\frac{m}{\varkappa\,\zeta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (65a).$$

Im Sonderfalle eines kreisförmigen Kornes ($m = 0$) geben die Formeln (65), wenn man den Zug in der Richtung der $O\,x$-Achse (d. h. bei $\alpha = 0$) betrachtet:

$$\varphi(\zeta) = \frac{p\,R}{4}\left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = -\frac{p\,R}{2}\left(\zeta + \frac{\gamma}{\zeta} + \frac{\delta}{\zeta^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68),$$

wobei zur Abkürzung $\beta = -\frac{2\,(\lambda+\mu)}{\lambda + 3\,\mu}$, $\gamma = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, $\delta = \frac{\lambda + 3\,\mu}{\lambda + \mu}$ gesetzt ist.

[34]) M_0 bezeichnet das Moment der Kräfte, die auf den Rand des elastischen Materials wirken.

Für die Spannungs- und Verschiebungskomponenten ergibt sich in diesem Falle nach den Formeln (22) und (24), wobei $\omega(\zeta) = R\zeta$ zu nehmen ist:

$$\left.\begin{aligned} v_\varrho &= \frac{pR}{8\mu\varrho}\left\{(\varkappa-1)\varrho^2 + 2\gamma + \left[(\varkappa+1)\beta + 2\varrho^2 + \frac{2\delta}{\varrho^2}\right]\cos 2\vartheta\right\}, \\ v_\vartheta &= -\frac{pR}{8\mu\varrho}\left\{(\varkappa-1)\beta + 2\varrho^2 - \frac{2\delta}{\varrho^2}\right\}\sin 2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (69).$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\varrho\varrho} = \frac{p}{2}\left[1 - \frac{\gamma}{\varrho^2} + \left(1 - \frac{2\beta}{\varrho^2} - \frac{3\delta}{\varrho^4}\right)\cos 2\vartheta\right], \quad \tau_{\vartheta\vartheta} = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{\gamma}{\varrho^2} - \left(1 - \frac{3\delta}{\varrho^4}\right)\cos 2\vartheta\right], \\ \tau_{\varrho\vartheta} = -\frac{p}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\varrho^2} + \frac{3\delta}{\varrho^4}\right)\sin 2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad (70).$$

Will man die gewöhnliche Polarkoordinaten r, ϑ in die z-Ebene einführen, so muß man einfach ϱ durch $\frac{r}{R}$ ersetzen.

Bemerkung. Dieselben Formeln (68), (69) und (70) gelten auch im Falle, daß am Rande des starren kreisförmigen Kornes statt Haftung reibungslose Gleitung Platz hat (d. h. am Rande $v_\varrho = 0$, $\tau_{\varrho\vartheta} = 0$ wird). Man muß nur, wie eine unmittelbare Prüfung zeigt, für β, γ und δ die folgenden Werte annehmen:

$$\beta = -\frac{2(\lambda+\mu)}{2\lambda+5\mu}, \quad \gamma = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \delta = -\frac{\mu}{2\lambda+5\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71).$$

Es werden aber auf einigen Teilen des Randes Zugspannungen auftreten, was physikalisch unmöglich ist. Um diese Zugspannungen zu vermeiden, genügt es z. B., einen allseitigen Druck D hinzuzufügen. Die zugehörigen Funktionen φ und ψ werden durch (65a) gegeben, wobei $q = -D$ und $m = 0$ zu setzen ist, d. h. $\varphi = -\frac{DR\zeta}{2}$, $\psi(\zeta) = -\frac{DR(\varkappa-1)}{2\zeta}$. Die zugehörigen Spannungskomponenten werden:

$$\tau_{\varrho\varrho} = -D\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2\varrho^2}\right), \quad \tau_{\vartheta\vartheta} = -D\left(1 - \frac{\varkappa-1}{2\varrho^2}\right), \quad \tau_{\varrho\vartheta} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (72).$$

Es ist auch leicht, die Lösung für den Fall zu finden, daß das Korn auch elastisch ist und beliebige elastische Konstanten hat.

2°. Betrachten wir nun den Fall, daß auf den Mittelpunkt des starren elliptischen Kornes eine äußere Kraft (X, Y) wirkt (die Spannungen im Unendlichen sind gleich 0 vorausgesetzt). Es ist aus Symmetriegründen klar (indem man die Kraft in Komponenten nach Ox und Oy zerlegt), daß das Korn keine Drehung erfährt. Da die Translation auch hier gleich Null genommen werden kann, so haben wir in diesem Falle: $g_1 = g_2 = 0$ und, da die Spannungen im Unendlichen verschwinden, $B = B' = C' = 0$. Dann geben die Formeln (63), (64) und (50):

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta, \quad \psi(\zeta) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\log\zeta + \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}.$$

3°. Endlich sei das Korn der Wirkung eines Kräftepaares, mit dem Momente M, unterworfen (die Spannungen im Unendlichen sind gleich 0 vorausgesetzt). Die Lösung dieser Aufgabe ist durch die Formel (65) geliefert, wobei $B = B' = C' = 0$ gesetzt werden müssen und ε aus der Gleichung (vgl. die Gl. (66)) $M = 4\pi\mu\varepsilon R^2\left(1 + \frac{m^2}{\varkappa}\right)$ zu bestimmen ist. Es wird also

$$\varphi(\zeta) = \frac{2\mu mR\varepsilon i}{\varkappa\zeta}, \quad \psi(\zeta) = \frac{2\mu R\varepsilon i}{\varkappa\zeta}\left(\varkappa + m\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right), \quad \text{wobei } \varepsilon = \frac{M\varkappa}{4\pi\mu R^2(m^2+\varkappa)} \quad (73).$$

14. Schlußbemerkung. Auch die zweite Randwertaufgabe ist immer im Falle, daß $\omega(\zeta)$ rationell ist, in elementarer Form lösbar, so daß man insbesondere leicht die Lösung für die in Ziffer 10 angeführten Berandungen finden kann.

Für die Anwendungen bietet noch eine weitere Randwertaufgabe, die wir als „dritte Randwertaufgabe" bezeichnen wollen, ein nicht geringeres Interesse als die zwei ersten. In dieser Aufgabe ist die Schubspannung am Rande gleich 0 vorausgesetzt und die normale Komponente der Verschiebung vorgeschrieben (der Fall, daß eine elastische Platte mit einem starren Profil von vorgeschriebener Form in Berührung ist). Diese Aufgabe ist unserer Methode auch zugänglich, wie ich in einer Mitteilung auf dem Mathematiker-Kongreß in Charkow (1930) gezeigt habe.

Über den Heaviside-Kalkül.

Von *K. Th. Vahlen* in Berlin.

Neben der funktionentheoretischen Behandlung der Differentialgleichungen bleibt ihre „Auflösung“ im älteren Sinn des Wortes für den Praktiker von Bedeutung, d. h. die Zurückführung der Lösungen auf Quadraturen oder auf zweckmäßige neu einzuführende Operationen. Das beweisen z. B. die Bemühungen um integrable Fälle des Hauptproblems der äußeren Ballistik, die mit D'Alembert einsetzten und erst in neuerer Zeit durch Drach zum Abschluß gekommen sind. Unter dem erwähnten praktischen Gesichtspunkt ist der Heaviside-Kalkül beachtenswert. Die Praktiker überschätzen ihn freilich, wenn sie sagen, man könne damit Probleme lösen, die sonst unlösbar seien. Demgegenüber wird wohl auch hier richtig sein, was Gauß bei ähnlichem Anlaß an Schumacher schreibt (15. Mai 1843): „Überhaupt verhält es sich mit allen solchen neuen Calcüls so, daß man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre. Der Vortheil ist aber der, daß, wenn ein solcher Calcül dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse correspondirt, jeder der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewußten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hülfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Buchstabenrechnung überhaupt, so mit der Differentialrechnung gewesen; so ist es auch (wenn auch in partielleren Sphären) mit Lagrange's Variationsrechnung, mit meiner Congruenzenrechnung und mit Möbius' Calcül. Es werden durch solche Conceptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen und jedesmal neue Efforts (kleinere und größere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche.“

Mit diesen Worten wird andrerseits die Unterschätzung zurückgewiesen, die dem Heaviside-Kalkül von seiten der Mathematiker zuteil wird, weil er nur auf einem Gebiete anwendbar ist, in dem grundsätzliche Schwierigkeiten nicht mehr zu überwinden sind. Schuld an dieser Geringschätzung ist aber auch die sehr unbefriedigende, vielfach angreifbare Darstellung, die Heaviside und seine Schüler dem Kalkül gegeben haben, wozu nicht die Polemik gegen die Mathematik erpaßt, die doch seit Leibniz und Lagrange das Wesentliche dieses Kalküls besitzen.

Ein strenger Aufbau und Ausbau des Kalküls erweist sich daher als wünschenswert. Hierzu soll im Folgenden ein Beitrag gegeben werden. Dabei war es des Zusammenhanges wegen unvermeidlich, auch Bekanntes, wenn auch oft in neuer Form, zur Darstellung zu bringen.

I. Ist

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \qquad (1)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \qquad (2),$$

dann ist bekanntlich

$$y = c_1(x)\, y_1 + \ldots + c_n(x)\, y_n \qquad (3)$$

ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = z(x) \qquad (4),$$

wenn die n Funktionen $c_h(x)$ den n Gleichungen genügen

$$c_1'\, y_1^{(k)} + \ldots + c_n'\, y_n^{(k)} = \delta_{k,\, n-1}\, z(x) \qquad (5)$$

($k = 0, \ldots n-1$; $\delta_{k,\,h} = 0$ bei ungleichen, $= 1$ bei gleichen Indizes).

Aus denen folgt

$$c_h(x) = \int^x \frac{\Delta_h}{\Delta}\, z(x)\, dx \qquad (h = 1, \ldots, n) \qquad (6),$$

wo

$\Delta = |\, y_h^{(k)} \,|$ die von 0 verschiedene Fundamentaldeterminante und $\Delta_h = \operatorname{adj} y_h^{(n-1)}$ . . (7)

ist. Nimmt man die n unteren Grenzen in (6) gleich x_0, so erhält man die zu x_0 gehörige „Hauptlösung“. Diese genügt den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = 0,\; y'(x_0) = 0,\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (8),$$

wie aus $c_h(x_0) = 0$ und den aus (3) und (5) folgenden Gleichungen

$$y^{(k)} = c_1(x)\, y_1{}^{(k)} + \ldots + c_n(x)\, y_n{}^{(k)}$$

sich ergibt. Dadurch wird nicht nur die allgemeine Lösung der nichthomogenen Gl. (4) auf die der homogenen (2) zurückgeführt, sondern es wird die Erfüllung von Anfangsbedingungen in die Lösung der homogenen Gleichung verlegt.

II. Nach dieser Vorerinnerung gehen wir zum Fall konstanter Koeffizienten über. Die einfachste Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0 \text{ oder in Lagrangescher Schreibweise } D^n y = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

hat die Lösung

$$y_0 + y_0'(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\, y_0{}^{(n-1)} (x - x_0)^{n-1} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

d. i. die Taylorsche Formel. Die n Integrationskonstanten $y_0{}^{(k)}$ dienen zur Erfüllung der Anfangsbedingungen:

$$\text{zu } x_0 \text{ gehören die Werte } y_0,\ y_0',\ldots,\ y_0{}^{(n-1)} \quad \ldots \ldots \quad (T).$$

Schreibt man dagegen statt der Anfangsbedingungen T die Randbedingungen L vor:

$$\text{zu } x_h \text{ gehört } y_h \qquad (h = 1, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \quad (L),$$

so wird die Lösung von (1) durch die Lagrangesche Formel geleistet:

$$y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Darin sind die Lagrangeschen Polynome $L_h(x)$ erklärt durch

$$L_h(x_i) = \delta_{hi}, \qquad L_h(x) = \frac{F_h(x)}{F'(x_h)}, \qquad F_h(x) = \frac{F(x)}{x - x_h}, \qquad F(x) = \Pi(x - x_h) \quad . \quad (4).$$

Die Lagrangesche Formel stellt eine ganze Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades $G(x)$ interpolatorisch durch die Werte y_h dar, die sie an n gegebenen Stellen x_h annimmt. Durch $F(x)$ geteilt gibt sie die Zerlegung der echt gebrochenen Funktion $\frac{G(x)}{F(x)}$ in Teilbrüche.

Wählt man $G(x) = (x - u)^k$, so erhält man für die Lagrangeschen Polynome die Formeln:

$$(x - u)^k = (x_1 - u)^k L_1(x) + \ldots + (x_n - u)^k L_k(x); \ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad \ldots \quad (5).$$

Allgemeiner seien die n Anfangs- und Randbedingungen vorgeschrieben:

$$\text{zu } x_i \text{ gehört } y_i,\ y_i',\ y_i'',\ldots,\ y_i{}^{(r_i - 1)};\ (i = 1, \ldots, r) \quad \ldots \ldots \quad (E).$$

Dann wird (1) gelöst durch

$$\sum_{i=1}^{r} F_i(x) \cdot \left\{ \left(\frac{y(x_i)}{F_i(x_i)}\right) + \left(\frac{y(x_i)}{F_i(x_i)}\right)' (x - x_i) + \ldots + \frac{1}{(r_i - 1)!} \left(\frac{y(x_i)}{F_i(x_i)}\right)^{(r_i - 1)} (x - x_i)^{r_i - 1} \right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Darin ist

$$F_i(x) = \frac{F(x)}{(x - x_i)^{r_i}}, \qquad F(x) = \Pi_i (x - x_i)^{r_i}; \qquad (i = 1, \ldots, r) \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Man beweist (6), indem man mit $F_i(x)$ teilt und dann nach h Differentiationen $(h = 0, 1, \ldots, r_i - 1)$ $x = x_i$ setzt.

Diese Formel stellt eine ganze Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades $G(x)$ dar, die den Bedingungen E genügt. Durch $F(x)$ geteilt gibt sie die Zerlegung der echt gebrochenen Funktion $\frac{G(x)}{F(x)}$ in Teilbrüche für den allgemeineren Fall, daß der Nenner mehrfache Wurzeln hat. Diesen Fall hat zuerst Euler behandelt, wenn auch ohne die allgemeine Formel (6) aufzustellen, die ich als die Eulersche bezeichne[1]).

[1]) Vgl. des Verf. Aufsatz: Der allgemeine Fall der Partialbruchzerlegung. Tokyo Butzurigakko Zassi. 1928.

Führt man in (6) die Differentiationen aus und ordnet nach den vorgeschriebenen Werten ***E***, so erhält man:

$$\sum_i y_i L_{i,0}(x) + y_i' L_{i,1}(x) + \ldots + y_i^{(\nu_i - 1)} L_{i,\nu_i-1}(x) \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

wo die verallgemeinerten Lagrangeschen Polynome $(n-1)$ten Grades $L_{i,k}$ erklärt sind durch

$$L_{i\,h}^{(k)}(x_j) = \delta_{i\,j}\,\delta_{h\,k}\,; \quad (i,j = 1,..,r;\, h,k = 0,..,\nu_i - 1) \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Nimmt man insbesondere $G(x) = (x-u)^k$, so erhält man für die verallgemeinerten Lagrangeschen Polynome die Gleichungen

$$(x-u)^k = \sum_i (x_i - u)^k L_{i\,0}(x) + ((x_i - u)^k)' L_{i,1}(x) + . + ((x_i - u)^k)^{(\nu_i - 1)} L_{i,\nu_i - 1}(x) \quad (10),$$

$$(k = 0,..,n-1)$$

wobei sich die Ableitungen, wie in (6), auf x_i beziehen.

III. Die nächst einfache Differentialgleichung ist

$$y^{(n)} = z(x) \text{ oder } D^n y = z(x) \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Eine partikuläre Lösung von (1) ist

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} z(u)\,du \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Und zwar ist dies die zu x_0 gehörige Hauptlösung. Denn es wird $y(x_0) = 0$, und die Differentiation von (2) ergibt

$$y' = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!} z(u)\,du \qquad \text{also } y'(x_0) = 0,$$

$$y'' = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n-3}}{(n-3)!} z(u)\,du \qquad \text{also } y''(x_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} z(u)\,du \qquad \text{also } y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$y^{(n)} = z(x).$$

Demnach ist die Lösung von (1), die den Anfangsbedingungen T genügt,

$$y = T(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} z(u)\,du \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

wenn man mit $T(x)$ das Taylor-Polynom II (2) bezeichnet. Die Formel (3) ist, wenn man darin $z = y^{(n)}$ einsetzt, die Taylorsche Formel mit dem Bernoullischen Restglied.

Die Lösung von (1), die den Randbedingungen L genügt, erhält man aus

$$y(x_i) = y(x) + \ldots + y^{(n-1)}(x)\frac{(x_i - x)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{x}^{x_i} \frac{(x_i - u)^{n-1}}{(n-1)!} z(u)\,du$$

durch Komposition mit den $L_i(x)$. Dabei ist links die Formel II (3), rechts sind die aus II (5) für $h = 0, 1, .., n-1$ und $u = x$ folgenden Formeln anzuwenden. Das ergibt, wenn man das Lagrangesche Polynom II (3) mit $L(x)$ bezeichnet,

$$y = L(x) + \sum_i L_i(x) \int_{x_i}^{x} \frac{(x_i - u)^{n-1}}{(n-1)!} z(u)\,du \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die Lagrangesche Formel mit dem Bernoullischen Restglied. Da $L(x)$ die Randbedingungen L erfüllt, erfüllt das Restglied von (4) dieselben Randbedingungen L, aber für den Hauptfall $y_h = 0\ (h = 1, .., n)$, wie aus II (4) folgt.

Um die Lösung von (1) für die Anfangs- und Randbedingungen E zu finden, leiten wir zunächst aus II (9) für $k=0, 1, ..$ und $u=x$ die Gleichungen ab

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma L_{i0}(x)=1 \qquad i=1,..,r \\ \Sigma(x_i-x)L_{i0}(x)+L_{i,1}(x)=0 \\ \Sigma(x_i-x)^2L_{i0}(x)+2(x_i-x)L_{i1}(x)+2L_{i2}(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma(x_i-x)^kL_{i0}(x)+k(x_i-x)^{k-1}L_{i1}(x)+k(k-1)(x_i-x)^{k-2}L_{i2}(x)+.+k!\,L_{ik}(x)=0\end{array}\right\} \quad . \quad (5)$$

usw. Dabei ist $L_{ik}=0$ zu setzen, wenn $k>r_i-1$ ist. Darauf komponieren wir die aus III (3) folgende Formeln

$$y^{(k)}(x_i)=y^{(k)}(x)+..+\frac{(x_i-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}y^{(n-1)}(x)+\int\limits_x^{x_i}\frac{(x_i-u)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}z(u)\,du \quad . \quad . \quad (6),$$

worin $i=1,..,r$ und $k=0,1,..,r_i-1$ zu setzen ist, mit $L_{ik}(x)$. Wenden wir auf die linke Seite die Formel II (8), auf die rechte die Formeln III (5) an, so erhalten wir

$$y=E(x)+\sum_i\int\limits_{x_i}^{x}\left|\frac{(x_i-u)^{n-1}}{(n-1)!}L_{i0}(x)+..+\frac{(x_i-u)^{n-r_i}}{(n-r_i)!}L_{i,\,r_{i-1}}(x)\right|z(u)\,du \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin zur Abkürzung das Polynom II (8) mit $E(x)$ bezeichnet ist.

IV. Bisher hätte die Verwendung symbolischer Methoden keinen Vorteil geboten. Zwar kann man mit Heaviside die Gleichung

$$D^n y=z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

symbolisch auflösen durch

$$y=D^{-n}z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

aber man darf durch die Erklärung des Symbols D^{-n} dieser Operation nicht die Vieldeutigkeit rauben, die ihr, wie jeder inversen Operation (Wurzel, Logarithmus, Arcus, ellipt. Int. usw.) ihrer Natur nach eigen ist. Man darf also nicht D^{-n} durch eine partikuläre Lösung von (1), z. B. wie Heaviside will, durch die zu $x_0=0$ gehörige Hauptlösung III (2), sondern nur durch die allgemeine Lösung erklären, die nur bis auf ein Integrations-Polynom $(n-1)$ten Grades bestimmt ist. Diese allgemeine Lösung kann durch das Integral

$$\int^{x}\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}z(u)\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ausgedrückt werden, wenn man übereinkommt, nach der Entwicklung des Binoms $(x-u)^{n-1}$ gliedweise zu integrieren und die dabei auftretenden n Integrationskonstanten unbestimmt zu lassen. In dieser Weise ist auch das Symbol

$$D^{-n}0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zu erklären, das Heaviside gebraucht.

Wir werden im folgenden fortfahren, das alte Lagrangesche D beizubehalten, statt des neuerdings in Gebrauch kommenden p, von dem die Heaviside-Schule meint, es leiste mehr als die älteren Symbole[2]). Nur wenn mehrere unabhängige Veränderliche, z. B. neben x noch die Zeit t vorkommt, ist es zweckmäßig, an Stelle der Lagrangeschen D_x und D_t kürzer zu schreiben D und p, also das Heavisidesche p den Ableitungen nach der Zeit vorzubehalten.

V. Bevor wir weitergehen, wollen wir einige Formeln betr. genäherte Quadratur einschalten, die sich hier sehr kurz an die Taylorsche Formel III (3) anknüpfen lassen, wenn man diese etwas allgemeiner so schreibt:

$$\left[f(u)+(x-u)f'(u)+{}^1\!/_2(x-u)^2f''(u)+..+\frac{1}{n!}(x-u)^nf^{(n)}(u)\right]_{u=a}^{u=b}=\int\limits_a^b\frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du \quad . \quad (1),$$

aus der III (3) für $n+1$ statt n entsteht, wenn man x für b und x_0 für a einsetzt. Die Formel (1) beweist man z. B. durch partielle Integration.

[2]) Vgl. z. B. E. J. Berg: Rechnung mit Operatoren nach Oliver Heaviside, ihre Anwendung in Technik und Physik. Deutsche Bearbeitung von O. Gramisch u. H. Tropper. 1932, S. 3.

Nehmen wir in (1) einmal $a = m$, $x = b$ und zweitens $b = m$, $x = a$ und bilden die Summe beider Formeln, so erhalten wir für ungerade n, wenn unter m die halbe Summe, unter h der halbe Unterschied von a und b verstanden wird, die Formel

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f'(u)\,du &= 2hf'(m) + \frac{2h^3}{3!}f'''(m) + \ldots + \frac{2h^n}{n!}f^{(n)}(m)\\ &+\int_m^b \frac{(b-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du + \int_a^m \frac{(a-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Das $\begin{Bmatrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\end{Bmatrix}$ Restintegral bringt man vermittelst $u = m \pm v$ auf dieselben Grenzen, so daß der Rest der Formel (2) wird

$$\int_0^h \frac{(h-v)^n}{n!}\left[f^{(n+1)}(m+v) - f^{(n+1)}(m-v)\right]dv \quad \ldots\ldots \quad (2').$$

Die Formel ist die Entwicklung des Fehlers, den man begeht, wenn man das Integral $\int_a^b F(u)\,du$ durch das Tangententrapez $(b-a)\,F(m)$ berechnet.

In (1) setzen wir ferner $x = (1+B)\,b - Ba = b + Bh = a + (1+B)\,h$, $b - a = h$. Die Entwicklung nach Potenzen von B besteht identisch, also auch, wenn man die Potenzen $B^i = B_i$ setzt und unter B_i die durch die symbolische Rekursionsformel $(1+B)^i = B^i$, $(i = 2, 3, \ldots)$ definierten Bernoullischen Zahlen versteht: $B_1 = -{}^1/_2$, $B_2 = {}^1/_6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -{}^1/_{30}$, .. So erhalten wir die Formel:

$$\int_a^b f'(u)\,du = h\frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \left[\sum_{i=2}^{n}\frac{(BhD)^i}{i!}f(u)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-u+Bh)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du \quad \ldots \quad (3).$$

Das ist die Eulersche Reihe, die Entwicklung des Fehlers, den man begeht, wenn man das Integral $\int_a^b F(u)\,du$ genähert durch das Sehnentrapez $(b-a)\dfrac{F(a)+F(b)}{2}$ berechnet.

Durch die Anwendung der Formel (3) auf Teilintervalle gleicher Größe und geeignete Komposition bekommt man die Fehler-Entwicklung der Cotesschen Formeln, z. B. der Simpsonschen Regel, der $\frac{3}{8}$-Regel usw. Für die Simpsonsche Regel hat man die Formel (3) auf die Intervalle $a\,..\,b$, $a\,..\,m$, $m\,..\,b$ anzuwenden und die drei erhaltenen Formeln zu komponieren mit $-\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$, das ergibt

$$\int_a^b f'(u)\,du = h\frac{f'(a)+4f'(m)+f'(b)}{6} - \left[\sum_{i=4}^{n}\frac{2^{2-i}-1}{3}\frac{(BhD)^i}{i!}f(u)\right]_a^b + \frac{1}{6\,n!}R \quad \ldots \quad (4)$$

$$R = \int_0^{{}^1/_2 h}\left(3({}^1/_2 h - v + Bh)^n - 4(v+Bh)^n + ({}^1/_2 h + v + Bh)^n\right)\left(f^{(n+1)}(m+v) - f^{(n+1)}(m-v)\right)dv.$$

Setzen wir in (1) $x = Eh + m = a + (E+1)\,h = b + (E-1)\,h$, also $b - a = 2h$, und erklären die Eulerschen Zahlen durch $E^i = E_i$ und die symbolische Rekursionsformel $(E+1)^i = -(E-1)^i$ für $i = 1, 2, \ldots$, so erhalten wir

$$\int_a^b f'(u)\,du = \sum_{i=0}^{n}\frac{((E+1)\,hD)^i}{i!}(f'(a)+f'(b)) + \frac{1}{n!}\int_a^b (Eh+m-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du \quad \ldots \quad (5)$$

ein Gegenstück zur Eulerschen Reihe. Das Restintegral läßt sich wie oben durch $u = m \pm v$ transformieren in

$$\int_0^h (Eh+v)^n\left(f^{(n+1)}(m+v) - f^{(n+1)}(m-v)\right)dv.$$

Die Reihe (5) entwickelt den Fehler der Sehnentrapezformel nach Potenzen von h, aber die Eulersche nur nach den geraden Potenzen.

Die Formel (2) bezeichnet G. Kowalewski, der sie anders herleitet (Interpolation und genäherte Quadratur, 1932, S. 55), als die allgemeine Maclaurinsche Quadraturformel. Von der Formel (4) hat Kowalewski den Fall $n = 3$ auf S. 49, nämlich die Formel

$$\int_a^b f'(u)\,du = h\,\frac{f'(a) + 4f'(m) + f'(b)}{6} - \frac{1}{6}\int_0^{1/2\,h}\left(\frac{h}{2} - v\right)^2 v\,(f''''(m+v) - f''''(m-v))\,dv\,.$$

VI. Die Gleichung $y' + a\,y = 0$ oder $(D + a)\,y = 0$ wird gelöst durch $y = e^{-a\,x}$. Die Operation $D + a$ wird auf die Operation D zurückgeführt durch

$$(D + a)\,y = e^{-a\,x}\,D\,e^{a\,x}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(Heavisides Verschiebungssatz). Dadurch wird die Lösung der Gleichung $(D + a)\,y = z$ zurückgeführt auf die der Gleichung $e^{-a\,x}\,D\,e^{a\,x}\,y = z$ und also die Operation $(D + a)^{-1}$ auf die Operation D^{-1} [3]). Die Lösung ist also $y = e^{-a\,x}\int e^{a\,x}\,z\,dx$. Es gilt also auch

$$(D + a)^{-1}\,z = e^{-a\,x}\,D^{-1}\,e^{a\,x}\,z\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Aus (1) und (2) folgt durch wiederholte Anwendung

$$(D + a)^n\,y = e^{-a\,x}\,D^n\,e^{a\,x}\,y \quad \text{und} \quad (D + a)^{-n}\,z = e^{-a\,x}\,D^{-n}\,e^{a\,x}\,z\,. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und daraus die Auflösung der Gleichungen

$$(D + a)^n\,y = 0 \qquad y = e^{-a\,x} \text{ mal einem Polynom } (n-1)\text{ten Grades} \quad \ldots \quad (4),$$

$$(D + a)^n\,y = z \qquad y = e^{-a\,x}\int^x e^{a\,x}\,\frac{(z-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,z(u)\,du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

(nach II (2) und III (2)). Durch (4, 4') ist die Operation $(D + a)^{-n}$ erklärt. Allgemeiner gilt der Verschiebungssatz

$$f(D + a) = e^{-a\,x}\,f(D)\,e^{a\,x}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

wenn f eine rationale Funktion mit Zahlenkoeffizienten ist. Denn eine solche zerfällt in Glieder von den Formen $c\,(D + a)^n$ und $c\,(D + a)^{-n}$ (s. II (6)). (4') mit der unteren Grenze x_0 ist die zu x_0 gehörige Hauptlösung. Das ist für $a = 0$ (s. III (2)) bewiesen, und folgt daraus, indem man dort für $z(u)$ einsetzt $e^{a\,u}\,z(u)$. Da das Integral in (4') und seine ersten $n - 1$ Ableitungen bei $x = x_0$ verschwinden, gilt dasselbe für $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Die Operationen D^m, D^n sind unter sich und mit Zahlenfaktoren vertauschbar. Dasselbe gilt für D^{-m}, D^{-n}, denn aus $D^m\,D^n\,y = D^{m+n}\,y = z$ folgt $D^{-n}\,D^{-m}\,z = y = D^{-(m+n)}\,z$, also $D^{-n}\,D^{-m} = D^{-(n+m)} = D^{-(m+n)} = D^{-m}\,D^{-n}$. Diese Gleichungen bestehen aber nur unter Berücksichtigung der Vieldeutigkeit der inversen Operationen (s. IV). Die letzteren sind also z. B. als Kongruenzen aufzufassen für einen aus einem Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $D^{m+n}\,y = 0$ bestehenden Modul. Wir sehen davon ab, für diese Art Gleichheit ein neues Zeichen einzuführen. Aus $D^{-n}\,D^{-m} = D^{-(m+n)}$ folgt weiter $(D^{-1})^n = D^{-n}$.

Aus $D\,y = z$, $y = D^{-1}\,z$ folgt sowohl $D\,D^{-1}\,z = z$, als auch $D^{-1}\,D\,y = y$, also ist $D\,D^{-1} = D^{-1}\,D = 1$, $(D^{-1})^{-1} = D$. Mit den Operationen D^m, D^{-n} kann also gerechnet werden wie mit Potenzen.

Zufolge der Verschiebungssätze (3) gilt demnach dasselbe für die Operationen $(D + a)^m$, $(D + a)^{-n}$. Also gilt die Vertauschbarkeit auch für ein Produkt $(D + a)^m\,(D + b)^n$, wenn wenigstens einer der Exponenten, z. B. n positiv ist, denn dann kann man $(D + a + b - a)^n$ als Polynom von $D + a$ darstellen. Sind beide negativ, dann folgt die Vertauschbarkeit durch Auflösung von

$$(D + a)^m\,(D + b)^n\,y = z = (D + b)^n\,(D + a)^m\,y\,,$$

nämlich $y = (D + a)^{-m}\,(D + b)^{-n}\,z = (D + b)^{-n}\,(D + a)^{-m}\,z$.

[3]) Zur Erklärung von $(D + a)^{-1}$ braucht man dies nicht in eine geometrische Reihe $\frac{1}{D} - \frac{a}{D^2} + \ldots$ zu entwickeln wie E. J. Berg, a. a. O. S. 5.

Allgemein erkennt man den Satz: Ist $F(D)$ der Nenner eines Produktes von mehreren rationalen Funktionen von D, so bleibt das Ergebnis dieser Operation bei einer Vertauschung der Faktoren unverändert bis auf eine Funktion $(F(D))^{-1}\,0$. Denn ist $G(D)$ der Zähler dieses Produktes, der ungeändert bleibt bei Umordnung der Faktoren, und ist y der Unterschied des Ergebnisses, wenn man die Operation vor und nach der Umordnung anwendet, so ist $\frac{G(D)}{F(D)}\,0 = y$, also, nach Anwendung von $F(D)$, ist $F(D)\,y = G(D)\,0 = 0$.

VII. Es gilt der allgemeinere Verschiebungssatz

$$D + p(x) = P^{-1} D P, \quad P = e^{\int p\,dx} \qquad (1).$$

Dadurch wird die Gleichung

$$(D + p)\,y = z \qquad (2)$$

zurückgeführt auf

$$P^{-1} D P y = z,$$

also gelöst durch

$$y = P^{-1} \int P z\,dx \qquad (3),$$

d. h. es ist

$$(D + p)^{-1} = P^{-1} D^{-1} P \qquad (4).$$

Der Verschiebungssatz (1) gilt also auch für $(D + p)^{-1}$.

Die wiederholte Anwendung von (1) gibt

$$(D + p)^n = P^{-1} D^n P \qquad (5).$$

Dadurch wird die Gleichung

$$(D + p)^n y = z \qquad (6)$$

zurückgeführt auf

$$P^{-1} D^n P y = z,$$

also gelöst durch

$$y = P^{-1} \int^{x} P \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} z(u)\,du \qquad (7).$$

Damit ist das Symbol $(D + p)^{-n}$ erklärt. Aus (7) folgt

$$(D + p)^{-n} = P^{-1} D^{-n} P \qquad (8),$$

d. h. nach (5) und (8): der Verschiebungssatz gilt in der allgemeineren Form

$$f(D + p) = P^{-1} f(D) P \qquad (9),$$

wenn f eine rationale Funktion mit Zahlenkoeffizienten ist. Dadurch wird die Auflösung der Gleichung

$$f(D + p)\,y = z \qquad (10)$$

zurückgeführt auf

$$f(D)\,P y = P z \qquad (11).$$

Hat das Produkt mehrerer rationaler Operationen $f(D + p)$, $g(D + p)$, .. den Zähler $G(D + p)$ und den Nenner $F(D + p)$, so wird zufolge (9) eine Vertauschung der Faktoren nur eine Änderung y bewirken gleich $P^{-1} \frac{G(D)}{F(D)} P\,0 = \frac{G(D+p)}{F(D+p)}\,0 = y$, woraus $F(D + p)\,y = G(D + p)\,0 = 0$ folgt, d. h. die Vertauschung von Faktoren bewirkt nur Änderungen um Lösungen des Nenners.

VIII. In der homogenen Gleichung

$$f(D)\,y = 0 \qquad (1)$$

sei

$$f(D) = (D - \varrho_1)(D - \varrho_2)\ldots(D - \varrho_n) = f_i(D)(D - \varrho_i), \quad f'(\varrho_i) \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2),$$

also die Wurzeln ϱ_i zunächst alle verschieden. Jede Lösung von

$$(D - \varrho_i)\,y = 0$$

ist eine Lösung von (1). Demnach sind $e^{\varrho_i x}$ ein System von n Lösungen. Diese bilden bekanntlich ein Fundamentalsystem, die Fundamentaldeterminante ist gleich dem Produkt der Differenzen $\varrho_i - \varrho_j$.

In der allgemeinen Lösung

$$y = c_1 e^{o_1 (x - x_0)} + . . + c_n e^{o_n (x - x_0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2')$$

sollen die n Integrationskonstanten c_i so bestimmt werden, daß die n Anfangsbedingungen T erfüllt sind. Das gibt die n Gleichungen

$$D^h y_0 = c_1 o_1{}^h + . + c_n o_n{}^h \qquad (h = 0, 1, . . , n - 1).$$

Der Vergleich mit dem Gleichungssystem II (5), wo $u = 0$, $x = D$, $x_i = o_i$ zu setzen ist, ergibt die Lösung $c_i = L_i (D)\, y$, also ist

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{o_i (x - x_0)}}{f'(o_i)} f_i (D)\, y_0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

die gesuchte Lösung von (1), die die Anfangsbedingungen T erfüllt.

IX. Jetzt sei in der Gleichung

$$f(D)\, y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$f(D) = \prod_i (D - o_i)^{r_i} = f_i(D)(D - o_i)^{r_i}, \quad \sum_i r_i = n, \quad f^{(h)}_{(o_i)} \begin{cases} = 0 \, (h < r_i) \\ \neq 0 \, (h = r_i) \end{cases} (i = 1, . . , r) \; . \; . \quad (2).$$

Jede Lösung einer der Gleichungen

$$(D - o_i)^{r_i}\, y = 0,$$

die nach VI (4) zu finden ist, ist eine Lösung von (1). Die n Lösungen [4])

$$e^{o_i x} x^k \qquad (k = 0, 1, . . , r_i - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

bilden ein Fundamentalsystem, ihre Fundamentaldeterminante ist gleich dem Produkt der Differenzen $(o_i - o_j)^{r_i r_j}$ (s. I).

In der allgemeinen Lösung

$$y = \sum c_{i\,k}\, e^{o_i (x - x_0)} (x - x_0)^k \qquad (i = 1, . . , r;\; k = 0, . . , r_i - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

sollen die n Integrationskonstanten $c_{i\,k}$ so bestimmt werden, daß sie den Anfangsbedingungen T genügt. Das gibt, da die h-te Ableitung von $e^{o_i (x - x_0)} (x - x_0)^k$, wenn man darin $x = x_0$ setzt, gleich $h\,(h - 1) . . (h - k + 1)\, o_i{}^{h-k}$ bzw. 0 für $h < k$ ist, die n Gleichungen

$$D^h y_0 = \sum_i c_{i\,0}\, o_i{}^h + h\, c_{i\,1}\, o_i{}^{h-1} + . . + h\,(h - 1) . . (h - r_i + 2)\, c_{i,\, r_i - 1}\, o_i{}^{h - r_i - 1} \quad (h = 0, . . , n - 1) \, .$$

Der Vergleich mit II (9), wo $u = 0$, $x = D$, $x_i = o_i$ zu setzen ist, ergibt

$$c_{i\,k} = L_{i\,k} (D)\, y_0 \, .$$

Demnach ist

$$y = \sum_{i,k} e^{o_i (x - x_0)} (x - x_0)^k L_{i\,k} (D)\, y_0 \qquad (i = 1, . . , r;\; k = 0, . . , r_i - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

die Lösung von (1), welche die Anfangsbedingungen T erfüllt.

X. Für die nichthomogene Gleichung

$$f(D)\, y = z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

möge VIII (2) gelten. Aus II (3) (4) folgt die Zerlegung in Teilbrüche

$$\frac{1}{f(D)} = \sum_i \frac{a_i}{D - o_i}, \qquad a_i = \frac{1}{f'(o_i)}, \qquad (i = 1, . . , n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Es wird behauptet, daß

$$y = \sum_i a_i (D - o_i)^{-1} z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

der Gl. (1) genügt, wenn darin die Operationen $(D - o_i)^{-1}$ nach VI erklärt werden. Zum Beweise wende man auf (3) die Operation $f(D)$ an und berücksichtige, daß man nach VI mit den Symbolen $(D - o_i)$, $(D - o_i)^{-1}$ wie mit Größen rechnen kann, so erhält man $f(D)\, y = z$.

---

[4]) Auch wenn $f(D)$ von x abhängt, gilt: wenn $f^{(h)}(D)\, y \begin{Bmatrix} = 0 \, (h < r) \\ \neq 0 \, (h = r) \end{Bmatrix}$, so sind $y\, x^h \, (h < r)$ Lösungen. Das folgt aus der „Taylor-Formel“: $f(D)\, s\, y = s\, f(D)\, y + s' f'(D)\, y + . + \frac{s^{(n)}}{n!} f^{(n)}(D)\, y$ und diese aus dem Fall $f(D) = D^k$.

Nimmt man in den n Integralen $(D-o_i)^{-1}z$ die untere Grenze gleich x_0, so entsteht die zu x_0 gehörige Hauptlösung. Bildet man nämlich von (3) die h-te Ableitung $(h=0,.,n-1)$, setzt dann $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ usw., so erhält man

$$y_0=0,$$

$$y_0'=\Sigma a_i z_0,$$

$$y_0''=\Sigma a_i(o_i z_0+z_0'),$$

$$\ldots$$

$$y_0^{(n-1)}=\Sigma a_i(o_i^{n-2}z_0+o_i^{n-3}z_0'+.+z_0^{(n-2)})$$

und diese Ausdrücke sind 0, denn aus II (5) erhält man für $u=x$, $h=n-1$:

$$0=\sum(o_i-x)^{n-1}\frac{f_i(x)}{f'(o_i)}=-f(x)\sum a_i(o_i-x)^{n-2},\ \text{also}\ \sum a_i o_i^h=0\ \text{für}\ h=0,.,n-2.$$

XI. Die nichthomogene Gleichung für den Fall IX (2) nehmen wir in der etwas allgemeineren Form

$$f(D)\,y=g(D)\,z \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (1),$$

in der auch g eine ganze Funktion mit Zahlenkoeffizienten ist. Ist g von nicht niedrigerem Grade als f, ist also $g=qf+h$, wo q der Quotient, h der Rest der Division von g durch f, also von geringerem Grade als f ist, so geht aus der Gl. (1) in der Form

$$f(D)\,(y-q(D)\,z)=h(D)\,z \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (2)$$

hervor, daß die Lösung von (1) sich aus der Lösung von

$$f(D)\,y=h(D)\,z \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (3)$$

und dem integralfreien Teil $q(D)\,z$ zusammensetzt. Da das Auftreten eines integralfreien Teiles auch für die Erfüllung von Anfangsbedingungen keinerlei Schwierigkeiten bietet, können wir uns weiterhin auf den Fall beschränken, daß der Grad m von g kleiner ist als der von f.

Es sei nach II (6) in Teilbrüche zerlegt

$$\frac{g(D)}{f(D)}=\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{(D-o_i)^k}\ \text{mit}\ a_{ik}=\frac{1}{(r_i-k)!}\left(\frac{g(o_i)}{f_i(o_i)}\right)^{(r_i-k)} \quad (i=1,.,r;\,k=1,.,r_i)\ \ldots\quad (4),$$

dann genügt

$$y=\sum_{i,k}a_{ik}(D-o_i)^{-k}z \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (5)$$

der Gl. (1), wenn die Symbole $(D-o_i)^{-k}$ nach VI erklärt werden. Zum Beweise wende man auf (5) die Operation $f(D)$ an und berücksichtige die Symbolrechnung nach VI, so erhält man (1).

Um die Hauptlösung von (1) zu finden, finde man zunächst nach IX die Lösungen Y und Z der Gleichungen

$$f(D)\,Y=0\ \text{und}\ g(D)\,Z=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (6)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$Y_0^{(h)}=y_0^{(h)} \qquad (h=0,.,n-1) \quad\ldots\ldots\ldots\quad (7),$$

$$Z_0^{(k)}=z_0^{(k)} \qquad (k=0,.,m-1) \quad\ldots\ldots\ldots\quad (7').$$

Dann kann die Gl. (1) ersetzt werden durch

$$f(D)\,(y-Y)=g(D)\,(z-Z) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (8),$$

die nach (5) gelöst wird durch

$$y-Y=\Sigma a_{ik}(D-o_i)^{-k}(z-Z) \qquad (i=1,.,r;\,k=1,.,r_i) \quad\ldots\ldots\quad (9).$$

Die hierdurch definierte Funktion $y-Y$ mit unteren Integralgrenzen x_0 ist die gesuchte Hauptlösung von (1), y ist die den Anfangsbedingungen (7) genügende Lösung.

Denn nimmt man von (9) die h-te Ableitung ($h=0,..,n-1$) und setzt dann $x=x_0$, wodurch alle vorkommenden Integrale $(D-o_i)^{-1}$, $(D-o_i)^{-2}$,.. verschwinden, so erhält man, indem man bei der Ableitung jedes i-ten Gliedes $D=(D-o_i)+o_i$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} &y(x_0)-y_0=0 \\ &y'(x_0)-y_0'=\sum a_{ik}(D-o_i)^{-k+1}(z-Z)\Big|_{x_0}=\sum a_{i1}(z_0-Z_0)=0 \\ &y''(x_0)-y_0''=\sum a_{ik}(D-o_i)^{-k+2}(z-Z)\Big|_{x_0}=\sum a_{i1}(z_0'-Z_0')+a_{i2}(z_0-Z_0)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &y^{(n-1)}(x_0)-y_0^{(n-1)}=\,..=\sum a_{i1}(z_0^{(n-2)}-Z_0^{(n-2)})+a_{i2}(z_0^{(n-3)}-Z_0^{(n-3)})+\,..=0 \end{aligned}\right\} \quad (10),$$

wie für $m=n-1$ aus (7') folgt. Ist aber $m \leqq n-2$, so verschwindet zwar nicht $z_0^{(n-2)}-Z_0^{(n-2)}$, aber in

$$g(D)=\sum a_{ik}\frac{f(D)}{(D-o_i)^k}=\sum a_{ik}(D-o_i)^{\nu_i-k}\prod_{j\neq i}(D-o_j)^{\nu_j}$$

verschwindet der Koeffizient von D^{n-1}, also ist dann $\Sigma a_{i1}=0$. Ist ferner $m \leqq n-3$, so verschwindet zwar nicht $z_0^{(n-3)}-Z_0^{(n-3)}$, aber es verschwindet in $g(D)$ der Koeffizient von D^{n-3}, also ist $\Sigma a_{i2}=0$ usw. Dabei sind Koeffizienten a_{ik}, in denen k größer als ν_i ist, gleich 0 zu setzen.

XII. Für besondere Störungsfunktionen $z(x)$ können partikuläre Lösungen in einfacherer Weise gefunden werden. Da die homogenen Gleichungen durch Funktionen gelöst werden, die aus Gliedern der Form $e^{o_i x}x^k$ bestehen, liegt es nahe, den Fall zu betrachten, daß auch z von dieser Art ist, wozu insbesondere auch der wichtige Fall gehört, daß z periodisch ist.

Die Gleichung

$$f(D)\,y=g(D)\,e^{\ddot{o}x} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

oder nach dem Verschiebungssatz VI (5)

$$f(D+\ddot{o})\,e^{-\ddot{o}x}\,y=g(D+\ddot{o})\,1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1')$$

hat, weil $f(D+\ddot{o})\,1=f(\ddot{o})$ und $g(D+\ddot{o})=g(\ddot{o})$ ist, die partikuläre Lösung

$$y=e^{\ddot{o}x}\frac{g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2).$$

Dabei wurde angenommen, daß $f(\ddot{o})\neq 0$ ist. Ist aber

$$f(\ddot{o})=f'(\ddot{o})=f''(\ddot{o})=\,.=f^{(\nu-1)}(\ddot{o})=0,\; f^{(\nu)}(\ddot{o})\neq 0 \quad .\;.\; (3),$$

so gibt der Verschiebungssatz, da nach der Taylorschen Formel II (2) $f(D+\ddot{o})=f^{(\nu)}(\ddot{o})\frac{D^\nu}{\nu!}+\,..$ ist, daß die Gl. (1') die partikuläre Lösung hat

$$y=e^{\ddot{o}x}x^\nu\frac{g(\ddot{o})}{f^{(\nu)}(\ddot{o})} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4).$$

Aber auch

$$e^{\ddot{o}x}(x+D)^\nu\frac{g(\ddot{o})}{f^{(\nu)}(\ddot{o})} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4')$$

ist eine partikuläre Lösung, da sich (4'), wo D die Ableitung nach $\ddot{o}$ bedeutet, von (4) nur um eine Lösung der homogenen Gleichung $f(D)\,y=0$ unterscheidet.

Für die Gleichung

$$f(D)\,y=g(D)\,e^{\ddot{o}x}x^h \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

findet man durch h-maliges Differentiieren der Identität

$$f(D)\frac{e^{\ddot{o}x}g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})}=g(D)\,e^{\ddot{o}x}$$

nach $\ddot{o}$ die partikuläre Lösung

$$D_{\ddot{o}}^h\, e^{\ddot{o}x}\frac{g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})},$$

die nach dem Verschiebungssatz auch geschrieben werden kann

$$e^{\ddot{o}x}(x+D)^h \frac{g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Hier ist $f(\ddot{o}) \neq 0$ angenommen. Findet aber (3) statt, so sei $f(D) = \varphi(D)(D-\ddot{o})^\nu$. Aus $\varphi(D)(D-\ddot{o})^\nu y = g(e^{\ddot{o}x}x^h)$ folgt nach (6) $(D-\ddot{o})^\nu y = e^{\ddot{o}x}(x+D)^h \frac{g(\ddot{o})}{\varphi(\ddot{o})}$, daraus durch Verschiebung $D_x{}^\nu e^{-\ddot{o}x} y = (x+D)^h \frac{g(\ddot{o})}{\varphi(\ddot{o})}$, also durch Integration, als partikuläre Lösung von (5)

$$\frac{e^{\ddot{o}x}(x+D)^{h+\nu}}{(h+1)\ldots(h+\nu)} \frac{f(\ddot{o})}{\varphi(\ddot{o})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In (7) ist für $h=0$ die Lösung (4′) von (1), für $i=0$ die Lösung (6) von (5), für $h=i=0$ die Lösung (2) von (1) enthalten. Aus den gefundenen partikulären Lösungen (2), (4), (6), (7) findet man die zu x_0 gehörige Hauptlösung am einfachsten, indem man dieselben nach Potenzen von $x-x_0$ entwickelt und Glieder niedrigerer als n-ter Ordnung fortläßt.

Besteht die Störungsfunktion z aus mehreren Gliedern der Form

$$C\,e^{\ddot{o}x}x^h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

so ist die Integration für jedes Glied einzeln auszuführen, und zwar durch Bildung der Hauptlösung. Die Summe der Hauptlösungen ist die Hauptlösung der Gleichung. Das Verfahren ist auch anzuwenden, wenn z aus unendlich vielen Gliedern der Form (8) besteht, wie bei den Fourierschen Reihen, bei denen alle $h=0$ und die Exponenten $\ddot{o}$ die positiven und negativen rein imaginären ganzen Zahlen sind. Aber auch bei

$$z = \int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x}\,d\ddot{o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ist $y = \int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x}\frac{g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})}\,d\ddot{o}$ eine Lösung von $f(D)\,y = g(D)\,z$; denn, da hier die Operationen D und $\int$ vertauschbar, wird $f(D)\,y = \int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x} f(D+\ddot{o})\frac{g(\ddot{o})}{f(\ddot{o})}\,d\ddot{o} = \int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x}g(\ddot{o})\,d\ddot{o} = \int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x}g(D+\ddot{o})\,d\ddot{o}$ $= \int C(\ddot{o})\,g(D)\,e^{\ddot{o}x}\,d\ddot{o} = g(D)\int C(\ddot{o})\,e^{\ddot{o}x}\,d\ddot{o} = g(D)\,z$.

XIII. Wichtig ist der Fall, daß in der Gleichung

$$f(D)\,y = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

z von x unabhängig ist, also $=1$ genommen werden kann. Für den regulären Fall, daß alle o_i voneinander verschieden sind, ergibt sich aus XII (2) für $\ddot{o}=0$ die partikuläre Lösung $\frac{1}{f(0)}$, aus der die allgemeine durch Hinzufügen von VIII (2′) folgt. Wendet man aber die Lösung X (3) an und nimmt x_0 als untere Grenze der Integrale, so erhält man die partikuläre Lösung

$$\sum{}' a_i e^{o_i x}\int_{x_0}^{x} e^{-o_i u}\,du = \sum{}' \frac{e^{o_i(x-x_0)}}{o_i f'(o_i)} + \sum{}' \frac{1}{-o_i f'(o_i)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Ersetzt man die zweite Summe durch $\frac{1}{f(0)}$, wie aus der Teilbruchzerlegung II (3) (4) für $G=1$, $x=0$ folgt, so erhält man die Lösung

$$\frac{1}{f(0)} + \sum{}' \frac{e^{o_i(x-x_0)}}{o_i f'(o_i)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

die nach X die zu x_0 gehörige Hauptlösung ist.

Unter denselben Annahmen $z=1$, $o_i \neq o_j$ ergibt sich die Lösung von

$$f(D)\,y = g(D)\,1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gleich

$$\sum{}' \frac{g(o_i)}{f'(o_i)} e^{o_i x}\int_{x_0}^{x} e^{-o_i u}\,du = \sum{}' \frac{g(o_i)}{f'(o_i)}\left(\frac{e^{o_i(x-x_0)}}{o_i} + \frac{1}{-o_i}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Ersetzt man die zweite Summe durch $\dfrac{g(0)}{f(0)}$, wie aus der Teilbruchzerlegung II (3, 4) für $G = g$, $x = 0$ folgt, so erhält man die Lösung

$$\frac{g(0)}{f(0)} + \sum \frac{g(o_i)}{o_i f'(o_i)} e^{o_i (x - x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Dies ist nicht die Hauptlösung, denn sie verschwindet zwar für $x = x_0$, aber die $n - 1$ Ableitungen werden für $x = x_0$ gleich

$$\sum_i \frac{g(o_i) o_i^h}{f'(o_i)} \qquad (h = 0, ., n - 2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

und diese Summen verschwinden nur sämtlich, wenn g konstant ist. Man kann die Lösung (6) von (4) auch dahin ausdrücken, daß man sagt, die Lösung (3) von (1) gilt auch, wenn statt der ganzen Funktion f die gebrochene $\dfrac{f}{g}$ gesetzt wird. Denn dann ist f' zu ersetzen durch $\dfrac{f'}{g} - \dfrac{f g'}{g^2}$, also $f'(o_i)$ durch $\dfrac{f'(o_i)}{g(o_i)}$. In dieser allgemeineren Auffassung ist die partikuläre Lösung (3) von (1) als die Heavisidesche[5]) zu bezeichnen. Auf ihre besondere Bedeutung ist noch zurückzukommen. Es gelten also die Formeln

$$\sum \frac{o_i^h}{f'(o_i)} = 0 \qquad (h = 0, ., n - 2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

nur für ganze, nicht für gebrochene f[6]).

XIV. Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$f(D) y = g(D) z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für $z = 1$ und unter den Annahmen IX (2). Die Lösung XI (5) gibt in diesem Fall mit der unteren Grenze x_0

$$\sum a_{ik} e^{o_i x} \int_{x_0}^{x} e^{-o_i u} \frac{(x - u)^{k-1}}{(k-1)!} du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Das Integral ist das Bernoullische Restglied für die Funktion $\dfrac{e^{-o_i x}}{(-o_i)^k}$, also nach III (3) gleich

$$\frac{e^{-o_i x}}{(-o_i)^k} - e^{-o_i x_0} \left(\frac{1}{(-o_i)^k} + \frac{(x - x_0)}{(-o_i)^{k-1}} + . + \frac{(x - x_0)^{k-1}}{-o_i (k-1)!} \right) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Setzt man dies in (2) ein und ordnet nach Potenzen von $x - x_0$, so erhält man

$$-\sum A_{i1} + \sum e^{o_i (x - x_0)} \left(A_{i1} + A_{i2} (x - x_0) + . + A_{i \nu_i} \frac{(x - x_0)^{\nu_i - 1}}{(\nu_i - 1)!} \right) \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

worin die n Zahlen A_{ik} erklärt werden durch

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a_{i1}}{(-o_i)} + \dfrac{a_{i2}}{(-o_i)^2} + . + \dfrac{a_{i\nu_i}}{(-o_i)^{\nu_i}} = -A_{i1} \\ \dfrac{a_{i2}}{(-o_i)} + . + \dfrac{a_{i\nu_i}}{(-o_i)^{\nu_i - 1}} = -A_{i2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_{i\nu_i}}{-o_i} = -A_{i\nu_i - 1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Diese A_{ik} sind die Zähler der Teilbruchzerlegung

$$\frac{g(D)}{D f(D)} = \frac{A_{01}}{D} + \sum \frac{A_{ik}}{(D - o_i)^k} \qquad (i = 1, ., r;\ k = 1, ., \nu_i) \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Multipliziert man nämlich (6) mit D, so erhält man

$$\sum \frac{a_{ik}}{(D - o_i)^k} = A_{01} + \sum \frac{(D - o_i) + o_i}{(D - o_i)^k} A_{ik},$$

[5]) Electromagnetic Theory, II, S. 127.

[6]) Gauster (Arch. f. Elektrotechnik, XXIV, 1930, S. 381) verwendet sie bei seiner Herleitung der Heaviside-Formel irrtümlich auch für gebrochene, obwohl er sie S. 371 nur für ganze bewiesen hat.

also durch Koeffizientenvergleich

$$A_{01} + \Sigma A_{i1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

$$\left.\begin{aligned} A_{ik}\, o_i + A_{i,k+1} &= a_{ik} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i\nu_i}\, o_i &= a_{i\nu_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

Aus (8) berechnet man der Reihe nach die Größen $A_{i\nu_i}, A_{i\nu_i-1}, .., A_{i1}$ und erhält die Werte (5). Umgekehrt erhält man aus dem System (5) das System (8), indem man je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen von (5) mit $-o_i$ und -1 komponiert. Aus (7) berechnet man die $(n+1)$-te Größe A_{01}, die als erstes Glied in (4) eingesetzt werden kann. Die partikuläre Lösung (4) von (1) ist nicht die Hauptlösung. Es ist die Heaviside-Wagnersche Lösung[7]. Für $\nu_1 = \nu_2 = \cdot = 1$ geht aus ihr die Heaviside-Lösung XIII (6) von XIII (4) hervor, von der wir bereits sahen, daß es nicht die Hauptlösung für diesen Fall ist.

Nur wenn $g(D)$ von D unabhängig, also gleich $g(0)$ zu setzen ist, ist nach XIII die Heavisidesche die Hauptlösung. Dasselbe findet bei der Heaviside-Wagnerschen Lösung XIV (4) statt

$$y = A_{01} + \sum e^{o_i(x-x_0)}\left(A_{i1} + A_{i2}(x - x_0) + . + A_{i\nu_i}\frac{(x-x_0)^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}\right).$$

Denn hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_{01} + \Sigma A_{i1} \\ y_0' &= \Sigma A_{i2} + o_i A_{i1} \\ y_0'' &= \Sigma A_{i3} + 2\, o_i A_{i2} + o_i^2 A_{i1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \Sigma A_{in} + n\, o_i A_{i,n-1} + {}^1\!/_2\, n(n-1)\, o_i^2 A_{i,n-2} + . + o_i^{n-1} A_{i1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Diese Größen sind aber die Entwicklungskoeffizienten von XIV (6):

$$\frac{g(D)}{D f(D)} = \frac{A_{01}}{D} + \sum \frac{A_{ik}}{(D-o_i)^k} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

nach Potenzen von D^{-1}, denn es ist

$$(D-o)^{-k} = D^{-k} + k\, o\, D^{-k-1} + {}^1\!/_2\, k(k+1)\, o^2 D^{-k-2} + ..$$

Die Ausdrücke (9) sind also die Koeffizienten von $D^{-1}, D^{-2}, .., D^{-n}$ und diese verschwinden sämtlich, wenn und nur wenn $g(D)$ von D unabhängig ist, da dann die Entwicklung von $\frac{g(D)}{Df(D)}$ mit D^{-n-1} beginnt.

XV. Wir wollen die Heaviside-Wagnersche Lösung anders herleiten, indem wir an den Schluß von XII anknüpfen, dort

$$C(ö) = \frac{1}{ö} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

setzen und die Integration über eine geschlossene Kurve, das Innere links, erstrecken, die alle Nullstellen von $ö f(ö)$ umschließt. Nach dem Cauchyschen Residuensatze ist das durch $2\pi\sqrt{-1}$ geteilte Integral

$$\int e^{ö(x-x_0)}\frac{g(ö)\, dö}{f(ö)\, ö} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

gleich der Summe der Residuen des Integranden an dessen Polen $o, o_1, .., o_r$,

$$\text{Res. } e^{ö(x-x_0)}\left[\frac{g(ö)}{ö f(ö)}\right]_{ö=o_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Setzt man für $\frac{g(ö)}{ö f(ö)}$ die Teilbruchzerlegung XIV (6) $\sum \frac{A_{ik}}{(ö-o_i)^k}$, $(i = 0, 1, .., r)$, für $e^{ö(x-x_0)}$ die Entwicklung $e^{o_i(x-x_0)}(1 + (ö-o_i)(x-x_0) + {}^1\!/_2 (ö-o_i)^2(x-x_0)^2 + ..)$ ein, so erhält man als Koeffizienten von $(ö-o_i)^{-1}$ $e^{o_i(x-x_0)}\left(A_{i1} + A_{i2}(x-x_0) + . + A_{i\nu_i}\frac{(x-x_0)^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}\right)$. Die Summe dieser Residuen für $i = 0, 1, .., r$ ergibt die Heaviside-Wagnersche Formel XIV (4), die also einem z nach XII (9) mit $C = \frac{1}{ö}$ entspricht.

---

[7] K. W. Wagner: Der Satz von der wechselseitigen Energie. Elektrische Nachrichtentechnik. 1925, Bd. 2, S. 376.

XVI. Die Heaviside-Wagnersche Lösung ist also die Lösung der Gleichung

$$f(D)\,y = g(D)\,z \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wenn

$$z = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{\ddot{o}(x-x_0)} \frac{d\ddot{o}}{\ddot{o}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

genommen wird, wo die Integration ein Gebiet umschließt, in dem alle Nullstellen von $\ddot{o} f(\ddot{o})$ liegen. Hier erklärt sich das Auftreten der Teilbruchzerlegung von $\frac{g(D)}{D f(D)}$ in der Heaviside-Wagnerschen Lösung XIV (6), wenn man die Gleichung (1) durch die folgende ersetzt

$$D f(D)\,y = g\,D \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{\ddot{o}(x-x_0)}\, d\ddot{o} \quad \ldots \ldots \quad (1').$$

Denn daraus folgt

$$y = \sum \frac{A_{ik}}{(D-o_i)^k} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{\ddot{o}(x-x_0)}\, d\ddot{o} = \sum A_{ik} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int (D-o_i)^{-k} e^{\ddot{o}(x-x_0)}\, d\ddot{o}$$

$$= \sum A_{ik} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{\ddot{o}(x-x_0)}}{(\ddot{o}-o_i)^k}\, d\ddot{o} \ \text{(nach XII (1))} = \sum A_{ik}\, e^{o_i(x-x_0)} \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Die allgemeine Lösung XI (5) enthält nach VI (4′) Integrale, ist also an die Voraussetzung gebunden, daß diese Integrale existieren. Das legt der Funktion z bekanntlich nur geringe Beschränkungen auf, insbesondere kann z auch Sprungstellen haben, wie das z. B. von den Fourierschen Reihen her bekannt ist. Bedeutet z. B. in einem elektrichen Stromkreis J den Strom, R den Widerstand, L die Induktivität, K^{-1} die Kapazität eines eingeschalteten Kondensators, E die Spannung, so ist bekanntlich nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz

$$E = R\,J + L\,D\,J + K\,D^{-1}\,J \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

woraus sich umgekehrt die Lösung nach J symbolisch ergibt

$$J = \frac{D}{K + R\,D + L\,D^2} E \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Wird nun an den zunächst spannungslosen Kreis zur Zeit x die Spannung E angelegt, so haben wir den Fall vor uns, daß die Funktion z in (1) bei x_0 von 0 auf einen konstanten Wert springt. Es genügt, den zugehörigen Wert J aus (4) für den Fall zu finden, daß dieser konstante Wert gleich Eins ist, daß also der „Einheitsstoß der Spannung" an den Stromkreis angelegt wird, den Heaviside mit 1 bezeichnet[8]). Für eine m-fache Spannung ist auch nach (4) der Strom zu ver-m-fachen. Bei mehreren gekoppelten Stromkreisen ergeben sich durch Elimination aus dem dafür nach (3) aufzustellenden Gleichungssystem n^2 Gleichungen der Formel (1), wenn mit z eine der angelegten Spannungen, mit y der durch sie in einem der Stromkreise erzeugte Strom bezeichnet wird (siehe XVIII).

Die Lösung von (1), falls z der Einheitsstoß ist, ist jedenfalls gleich Null für $x < x_0$ und gleich einer partikulären Lösung der Gl. (1) mit $z = 1$ für $x > x_0$. Heaviside fand induktiv die Lösung XIII (6), die von Wagner in XIV (4) auf den Fall mehrfacher Nullstellen von f ausgedehnt ist. Die Wagnersche Lösung beruht darauf, daß er die den Einheitsstoß repräsentierende Funktion z durch einen diskontinuierlichen Faktor darstellt, wie sie zuerst Lejeune-Dirichlet eingeführt hat. Dieser Faktor ist gleich

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{\ddot{o}(x-x_0)} \frac{d\ddot{o}}{\ddot{o}} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

die Integration erstreckt längs der imaginären Achse von einem Werte $-R\sqrt{-1}$ bis zu $+R\sqrt{-1}$ unter Umgehung des Nullpunktes mit einem kleinen Halbkreise, der die reelle Achse auf der positiven Seite schneidet. Das Integral (5) hat unter diesen Voraussetzungen den Wert

0, wenn $x < x_0$ ist, $\quad$ $^1/_2$, wenn $x = x_0$ ist, $\quad$ 1, wenn $x > x_0$ ist.

[8]) In bezug auf das Rechnen mit Operatoren und dem Einheitsstoß hebt E. J. Berg (a. a. O., S. 25) hervor, daß man z. B. die Leistungsaufnahme einer Drosselspule aus dem Strom $I = \frac{1}{R + L\,D} 1$ und der Spannung $E = \frac{L\,D}{R + L\,D} 1$ nicht in der Form $I\,E = \frac{L\,D}{(R + L\,D)^2} 1^2$ finden könne, da „wir nur mit der Einheitsfunktion selbst rechnen können und keine Regeln für das Rechnen mit 1^2 bekannt sind. Weder Heaviside, noch irgend jemand anderer hat gezeigt, wie man mit 1^2 arbeiten kann". Der wahre Grund ist natürlich der, daß man nicht den Operator von seinem Operandus trennen kann, gleich, ob der Operandus der Einheitsstoß oder irgendeine andere Funktion ist.

Der Wert des Integrals (5) wird nicht geändert, wenn man R beliebig groß wählt und die Integration längs des Halbkreises mit dem Radius R schließt, der die reelle Achse auf der negativen Seite schneidet. Damit sind aber gerade die Voraussetzungen erfüllt, die wir für das Integral (2) machten, sofern die Nullstellen von f nur negative reelle Teile haben[9]). So kommt man also auf die Heaviside-Wagnersche Lösung[10]).

Der Vorteil, daß man den Einheitsstoß durch einen diskontinuierlichen Faktor (5) dargestellt hat, geht aber in der Heaviside-Wagnerschen Lösung XIV (4) wieder verloren, denn diese gibt die Lösung nur, wenn man sie selbst wieder mit (5) multipliziert. Das kann man aber auch mit der in XIV auf natürlicherem Wege gefundenen Lösung machen. Und dann braucht man nicht den Faktor (5), sondern es genügt irgendein Symbol, z. B. $\frac{1}{2}(1 + sgn\,(x - x_0))$ oder das Kroneckersche $\delta_{1,\, sgn\,(x - x_0)}$ oder das Heavisidesche 1.

Das Problem der Lösung von (1) für den Fall, daß z der Einheitsstoß ist, ist in diesem, wie in jedem anderen Fall so lange unbestimmt, bis nicht Anfangsbedingungen hinzugefügt sind, oder Angaben, aus denen solche hervorgehen. Keine Form, in der man den Einheitsstoß ausdrückt, kann dies ersetzen.

Die nächstliegenden sind die Bedingungen der Hauptlösung

$$y_0 = 0,\; y_0' = 0,\; y_0'' = 0, \ldots, y_0^{(n-1)} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

die den Zustand des Systems in dem Augenblick beschreiben, in welchem die elektromotorische Kraft auf das System einzuwirken beginnt (Carson S. 11). Für den Heavisideschen Fall, daß alle Nullstellen o_i von f unter sich verschieden sind, findet man die Hauptlösung bei konstantem z, indem man $g(D)\,z = g(0) \cdot z$ setzt, und dann X (3) mit x_0 als unteren Integralgrenzen anwendet. Dabei ist jetzt $a_i = \dfrac{g(0)}{f'(o_i)}$.

Dies ist im Grunde die Lösung von Caspar ([11]), gegen die Gauster ([12]) Einwendungen erhebt unter Hinweis auf die Gleichung XVI (3), in der er statt des Stromes J vermittelst $J = D\,Q$ die Kondensatorladung Q einführt, also die Gleichung schreibt

$$(L\,D^2 + R\,D + K)\,Q = E \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Gauster wendet ein, daß zur Zeit $x = x_0$, wo E auf 1 springt, zwar Q und $D\,Q$, aber nicht $D^2\,Q$ Null sein kann. Aber letzteres wird ja durch die Anfangsbedingungen (7) gar nicht gefordert, wie auch an demselben von Carson in seinem Buche S. 32 behandelten Beispiel zu erkennen ist.

Für den Wagnerschen Fall der mehrfachen Nullstellen von f oder also der Annahmen IX (2) findet man die Hauptlösung der Gl. XVI (1), wenn z der Einheitsstoß ist, indem man wieder $g(D)\,z = g(0) \cdot z$ setzt. Dann findet man die Hauptlösung nach XIV (9). Also für $g(D) = g(0)$ geht aus der Heaviside-Wagnerschen Lösung die Hauptlösung hervor.

XVII. Ein System von linearen Differentialgleichungen für n Funktionen y_k einer Veränderlichen x hat die Form

$$\Sigma f_{hk}(D)\,y_k = z_h(x) \qquad (h, k = 1, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Darin mögen die ganzen Funktionen f_{ik} Koeffizienten haben, die von x unabhängig sind. Setzt man die Determinante

$$|f_{hk}(D)| = F(D) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

komponiert die Gl. (1) mit den Adjunkten der k-ten Spalte adj f_{ik} $(i = 1, \ldots, n)$, so erhält man für y_k die Differentialgleichung

$$F(D)\,y_k = \sum_i \operatorname{adj} f_{hk}(D)\,z_h(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

die symbolisch aufgelöst wird durch

$$y_k = \sum_h y_{kh}\,, \qquad y_{kh} = \frac{\operatorname{adj} f_{hk}(D)}{F(D)}\,z_h(x) \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

9) Über die Berechtigung dieser Bedingung siehe unter XV. Aber auch ohne sie besteht die Heavisidesche Aufgabe und muß gelöst werden.

10) Die Anwendung des Residuensatzes soll auf Heavisideschen Andeutungen beruhen.

11) Arch. f. Elektrot. 1925, S. 95.

12) Arch. f. Elektrot. 1930, S. 360.

Der auf z_h anzuwendende Operator ist die zu f_{hk} Reziproke in der Determinante (2). Das System (4) kann vektoriell zusammengefaßt werden in

$$\mathfrak{y} = (\operatorname{rez} f_{hk}(D))\,\mathfrak{z} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5),$$

genau, wie die symbolische Lösung von $f(D)\,y = z$ geschrieben wurde $y = f(D)^{-1}\,z$. Zu allen n Gl. (3) gehört dieselbe charakteristische Gleichung $F(D) = 0$, deren Wurzeln o_h für die Beschaffenheit der Lösungen y_k entscheidend sind. Die Lösungen sind aus Gliedern der Form $e^{o_i x}\,x^h$ mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt. Für die praktisch vorkommenden Fälle, in denen x die Zeit ist, ist wichtig, daß keine Glieder vorkommen, die mit wachsender Zeit unbeschränkt wachsen. Also: Keine einfache Wurzel darf einen positiven Realteil haben. Jede mehrfache Wurzel muß einen negativen Realteil haben.

Für den Fall der kleinen oder der elastischen Schwingungen eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden ist in (1) zu setzen

$$f_{hk}(D) = c_{hk}\,D^2 + b_{hk}\,D + a_{hk}\,,$$

wobei $\qquad {}^1\!/_2 \sum c_{hk}\, y_h'\, y_k', \qquad {}^1\!/_2 \sum a_{hk}\, y_h\, y_k\,, \qquad {}^1\!/_2 \sum b_{hk}\, y_h'\, y_k'$

bzw. die kinetische, die potentielle und die durch Reibung (usw.) zerstreute Energie bedeuten. Etwaige gyroskopische Glieder $(b_{hk} - b_{kh})\, y_h'\, y_k'$ rühren von verborgenen Bewegungen her.

Für den Fall eines elektrischen Stromnetzes von n unter sich ohmisch, induktiv und kapazitiv gekoppelten Maschen ist in (1) zu setzen[13])

$$f_{hk}(D) = L_{hk}\,D^2 + R_{hk}\,D + K_{hk}\,,$$

wobei die drei entsprechenden quadratischen Formen bzw. die magnetische, elektrische und die als Joulesche Wärme verlorene Energie bedeuten. Die den gyroskopischen Gliedern entsprechenden zeigen verborgene Energiequellen (Senken) an, z. B. Verstärker.

Die charakteristische Gleichung $|f_{hk}(D)| = 0$ ist für den Fall, daß $b_{hk} = 0$ ist, als Säkular-Gleichung, Hauptachsen-Gleichung (usw.) bekannt; ihre Wurzeln für D^2 sind negativ, also für D rein-imaginär. Der mechanische oder elektrische Vorgang besteht, von äußeren Einwirkungen abgesehen, aus ungedämpften Schwingungen. Für den Fall $b_{hk} \neq 0$ habe ich folgendes bewiesen[14]). Erstens: Sind gyroskopische Glieder nicht vorhanden, ist also $b_{hk} = b_{kh}$, so haben die Wurzeln nur negative Realteile, der Vorgang ist stabil. Zweitens: bleiben die gyroskopischen Glieder unter gewissen Grenzen, so bleibt der Vorgang noch stabil; überschreiten sie diese Grenzen, so wird er instabil. Im stabilen Falle sind die von exponentiellen Faktoren freien Glieder die Werte der Veränderlichen, um welche die Schwingungen erfolgen und welche, falls Dämpfung mitwirkt, mit wachsender Zeit erreicht werden.

Dadurch hat die Meinung, die z. B. Carson (a. a. O. S. 30) äußert, daß „diese Bedingung bei allen Aufgaben linearer elektrischer Netze erfüllt ist“, ihre genauere Begründung gefunden. Wenn aber Carson (S. 5) sagt, daß für die Lösungsmethode die reziproke Beziehung nicht wesentlich ist, so kommt es dabei auf die Lösungsmethode an. Die Wagnersche mußte die Voraussetzung machen, daß alle Wurzeln negative Realteile haben. Man muß allerdings Lösungsmethoden verlangen, die von dieser Annahme unabhängig sind. Denn das Heavisidesche Problem besteht in jedem Fall und muß gelöst werden. Daß dies durchaus und mit einfachen Mitteln möglich ist, haben wir oben gesehen.

Ein Beispiel für ein unsymmetrisches Gleichungssystem der Art XVII (1) findet man bei Stodola, der ein solches zum Zweck der „Regulierung von Turbinen“ aufstellt, d. h. „zur Vermeidung zunehmender Schwankungen“. Seine Arbeit beweist wohl die praktische Bedeutung von Sätzen über die Beschaffenheit der Wurzeln einer Gleichung.

Wir haben uns bisher auf den wichtigsten Fall von Operatoren $\dfrac{g(D)}{f(D)}$ beschränkt, die rationale Funktionen von D waren, also aus einer ganzen rationalen Funktion und einer endlichen Teilbruchsumme $\sum \dfrac{a_{hk}}{(D - o_h)^k}$ bestanden. Unter gewissen Voraussetzungen, die die Konvergenz betreffen, läßt sich die Rechnung auf Operatoren ausdehnen, die aus einer ganzen transzendenten Funktion und aus Teilbruchreihen bestehen, mit unbegrenzter Anzahl von Polen o_h. Insbesondere läßt sich auch die Heaviside-Wagnersche Formel für diesen Fall beweisen, was bisher nur mit Hilfe des diskontinuierlichen Faktors und des Cauchyschen Residuensatzes erfolgt ist, also unter der zu beanstandenden Annahme, daß nur Pole mit negativen Realteilen vorhanden sind[15]). 337

[13]) Vgl. hierzu z. B. Carson (a. a. O. S. 3), der aber die Kapazitäten mit C bezeichnet. Dann ist aber nicht (Z. 18) C_{ii} die Summe aller Kapazitäten in der i-ten Masche, sondern es ist C_{ii}^{-1} die Summe aller reziproken Kapazitäten in derselben.

[14]) Wurzelabzählung bei Stabilitätsfragen.

[15]) Vgl. z. B. Rothe, Ollendorff, Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik (1931), S. 61.

Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der Rechenmaschine.

Von *Artur Nowakowski* in Wien.

1. Integration durch wiederholte Quadraturen.

Ein partikuläres Integral $y = y(x)$ einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei durch Angabe eines Punktes $x_0, y(x_0)$ bestimmt und für Werte von x, die dem Intervall

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + I \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

angehören, numerisch zu berechnen.

Es wird vorausgesetzt, daß $f(x, y)$ in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ der x, y-Ebene eine stetige Funktion von x, y mit beschränkten Differenzenquotienten nach y ist. Für jedes Punktpaar x, y_1; x, y_2 aus $\mathfrak{B}$ sei

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq B\,|y_2 - y_1| \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Ist M die Schranke von $|f(x, y)|$ in $\mathfrak{B}$, also für jeden Punkt x, y aus $\mathfrak{B}$

$$|f(x, y)| \leqq M \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

so soll der Bereich

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + I, \qquad |y - y(x_0)| \leqq M\,|x - x_0|$$

der x, y-Ebene in $\mathfrak{B}$ enthalten sein.

Wird eine Funktion $y^0 = y^0(x)$ so angenommen, daß die Punkte $x, y^0(x)$ dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehören, oder so, daß $|f(x, y^0)| \leqq M$ ist, so bilden die Funktionen

$$y^k = y^k(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{k-1})\,dx, \quad k = 1, 2 \ldots \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

bekanntlich eine Folge, die im Intervall (1) gleichmäßig gegen y konvergiert.

Die Integration nach dem hier angedeuteten Verfahren kann in einer Reihe aneinander grenzender Intervalle

$$x_{n-1} \leqq x \leqq x_n, \quad x_0 < x_n \leqq x_0 + I, \quad n = 1, 2 \ldots N,$$

und zwar in einem nach dem anderen, vollzogen werden. Als Anfangswert für die Integration im n-ten Intervall dient hierbei eine mit ausreichender Genauigkeit ermittelte Näherung für $y(x_{n-1})$.

Bezeichnet $y_n{}^k = y_n{}^k(x)$, $k = 0, 1 \ldots$ die sukzessiven Näherungen für y im n-ten Intervall, k_n die Anzahl der daselbst ausgeführten Quadraturen (4) und $Y = Y(x)$ die Näherung für y, die man auf diesem Wege gewinnt, so ist

$$Y(x) = y_n{}^{k_n}(x) \text{ für } x_{n-1} < x \leqq x_n, \quad Y(x_0) = y(x_0) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$y_n{}^k = Y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, y_n{}^{k-1})\,dx, \quad k = 1, 2 \ldots k_n \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Jede Folge verschiedener solcher Funktionen $Y(x)$, die zu verschiedenen Zahlen N-tupeln $k_1, k_2 \ldots k_N$ gehört, konvergiert gegen y, wenn die Zahlen $k_1, k_2 \ldots k_N$ unbeschränkt wachsen.

Von nun an werden die Punkte $x_0, x_1 \ldots x_N$ äquidistant mit der Spanne $x_n - x_{n-1} = h$ vorausgesetzt.

Die Quadraturen (4) und (6) können nach bekannten Methoden mit Hilfe eines Differenzenschemas des jeweiligen Integranden, oder auch auf Grund der Lagrangeschen Interpolationsformel durchgeführt werden. In diesem Falle wird in den einzelnen Interpolationsintervallen nach Formeln integriert, die ähnlich gebaut wie die Newton-Cotesschen Mittelwertformeln und sehr leicht mit einer Rechenmaschine auszuwerten sind.

Im folgenden wird ein solches Verfahren beschrieben, der damit verknüpfte Fehler abgeschätzt und die Konvergenz gewisser Folgen verschiedener nach dem Verfahren zu gewinnender Näherungen für y untersucht.

2. Numerische Ausführung.

1. Zur Integration im Intervall $x_{n-1} < x \leqq x_n$, $1 \leqq n \leqq N$, approximieren wir die Integranden in **1** (6) durch Polynome r-ten Grades mit den Interpolationsstellen

$$x_{n-p}, x_{n-p+1}, \ldots x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n-p+r} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Hierbei ist r eine der Zahlen 0, 1, 2... und $p = 1, 2, \ldots$ oder $r+1$, so daß das Integrationsintervall eines der Interpolationsintervalle ist oder an diese anschließt. Wie an späterer Stelle gezeigt wird, ist die größte Genauigkeit zu erhoffen, wenn das Intervall x_{n-1}, x_n das mittlere oder eines der beiden mittleren der r Interpolationsintervalle ist $\left(p = \frac{r+1}{2},\ \frac{r}{2}\right.$ oder $\left.\frac{r}{2}+1\right)$.

An die Stelle der Funktionen $y_n{}^k$, $k = 1, 2 \ldots$, die man durch die exakten Quadraturen **1** (6) erhält, treten Polynome $r+1$-ten Grades. Diese seien mit $\eta_n{}^k = \eta_n{}^k(x)$, die Näherung für y, die sich ergibt, wenn man y im n-ten Integrationsintervall durch das Polynom $\eta_n{}^{k_n}$ $(n = 1, 2 \ldots N)$ approximiert, sei mit $\eta = \eta(x)$ bezeichnet. Wir setzen also

$$\eta(x) = \eta_n{}^{k_n}(x) \quad \text{für } x_{n-1} < x \leq x_n, \quad n = 1, 2 \ldots N, \quad \eta(x_0) = y(x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

An die Stelle der Integranden $f(x, y_n{}^{k-1})$ in **1** (6) treten Interpolationspolynome der Funktionen

$$f(x, y_n{}^0), \quad f(x, \eta_n{}^1), \quad f(x, \eta_n{}^2) \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zur Darstellung dieser Polynome und ihrer Integrale setzen wir der Kürze halber

$$x_{n\nu} = x_{n-p+\nu}, \qquad \nu = 0, 1 \ldots r,$$

$$\eta^0_{n\nu} = y^0_n(x_{n\nu}), \qquad \eta^k_{n\nu} = \eta^k_n(x_{n\nu}), \quad k = 1, 2 \ldots$$

$$f^k_{n\nu} = f(x_{n\nu}, \eta^k_{n\nu}), \quad k = 0, 1 \ldots,$$

benutzen die Veränderliche

$$t = \frac{x - x_{n0}}{h},$$

bezeichnen mit $t^{(r+1)}$ die absteigende Faktorielle

$$t^{(r+1)} = t(t-1) \ldots (t-r),$$

mit

$$(t)_\varrho{}^r = \frac{t^{(r+1)}}{t-\varrho} : \left(\frac{t^{(r+1)}}{t-\varrho}\right)_{t=\varrho} = \frac{(-1)^{r-\varrho}}{\varrho!\,(r-\varrho)!}\,\frac{t^{(r+1)}}{t-\varrho}, \quad \varrho = 0, 1 \ldots r \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die Polynome in der Lagrangeschen Formel, wenn $t = 0, 1 \ldots r$ die Interpolationsstellen sind, und mit $(s, t)_\varrho{}^r$ die Polynome[1])

$$(s, t)_\varrho{}^r = \int_s^t (t)_\varrho{}^r\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dann sind

$$\frac{d\eta_n{}^{k+1}}{dx} = \sum_{\varrho=0}^{r} f^k_{n\varrho} \left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho, \quad k = 0, 1 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

jene Polynome r-ten Grades, die an den Interpolationsstellen (1) mit den Funktionen (3) übereinstimmen und

$$\eta_n{}^{k+1} = \eta(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f^k_{n\varrho} \left(p-1,\ \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho, \quad k = 0, 1 \ldots, \quad n = 1, 2 \ldots N \quad . \quad . \quad (7)$$

die numerischen Quadraturen, die an die Stelle der exakten Quadraturen **1** (6) treten.

Im besonderen ist an den Interpolationsstellen:

$$\eta^{k+1}_{n\nu} = \eta(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f^k_{n\varrho}\,(p-1, \nu)^r_\varrho, \quad \nu = 0, 1 \ldots r, \quad k = 0, 1 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und

$$\eta^k_{n,p-1} = \eta_n{}^k(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1}), \quad k = 1, 2 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

In der Regel wird man $y_n{}^0$ so annehmen, daß $y_n{}^0(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1})$ ist, dann gilt (9) auch für $k = 0$.

---

[1]) Bei dieser Bezeichnungsweise sind $\frac{1}{r}(0, r)^r_\varrho$, $\frac{1}{r+1}\left(-\frac{1}{2},\ r+\frac{1}{2}\right)^r_\varrho$ und $\frac{1}{r+2}(-1, r+1)^r_\varrho$ die Gewichte in den Mittelwertformeln nach Cotes, Mac-Laurin und Steffensen.

Die Koeffizienten $(p-1, \nu)_\varrho^r$ können durch Ausführung der Quadraturen (5) berechnet werden. Die Tabellen 1, 2 und 3 zeigen $(0, t)_\varrho^r$ für $r = 0, 1 \ldots 5$, $\varrho = 0, 1 \ldots r$, $t = -1, 0, 1 \ldots r, r+1$ und für $t = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots r + \frac{1}{2}$. Die in (8) benötigten Zahlen $(p-1, \nu)$ ergeben sich leicht nach der aus (5) folgenden Formel $(a, b)_\varrho^r = (0, b)_\varrho^r - (0, a)_\varrho^r$.

Wie später bewiesen wird, sind die Iterationen (8) bei hinlänglich klein angenommener Spanne h unter gewissen Voraussetzungen konvergent. Dann bleiben die Beträge $|\eta_{n\nu}^k - \eta_{n\nu}^{k-1}|$, $\nu = 0, 1 \ldots r$, von einer hinreichend großen Zahl k angefangen, unter jenem Maße, das bei der anzuwendenden Rechengenauigkeit gerade noch berücksichtigt werden muß. Ist dies von $k = k_n$ an der Fall, so brechen wir die Operationen (8) nach der Ermittlung der Zahlen $\eta_{n\nu}^{k_n}$ ab und setzen

$$\eta(x) = \eta_n^{k_n}(x) \text{ für } x_{n-1} < x \leq x_n .$$

Hiermit wird das Polynom $\eta_n^{k_n}$ als Näherung für y im n-ten und $\eta_{np}^{k_n} = \eta_n^{k_n}(x_n) = \eta(x_n)$ als Anfangswert im $n+1$-ten Integrationsintervall angenommen.

Zur Integration von x_n bis x_{n+1} werden in der Regel r und p gleich wie im n-ten Integrationsintervall gewählt und $y_{n+1}^0 = \eta_n^{k_n}$ angenommen. Dann sind die Zahlen $\eta_{n+1,\nu}^0 = \eta_{n,\nu+1}^{k_n}$ für $\nu = 0, 1 \ldots r-1$ von der Integration im n-ten Intervall her bereits bekannt, während $\eta_{n+1,r}^0$ auf Grund der Gleichungen (7) nach einer der Formeln

$$\eta_{n+1,r}^0 = \eta_{n,r+1}^{k_n} = \eta_{n\mu}^{k_n} + h \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1} (\mu, r+1)_\varrho^r , \quad \mu = 0, 1 \ldots \text{ oder } r \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

zu berechnen ist.

Waren h, r und p zweckmäßig gewählt, so wird bei diesem Verfahren oft schon ein- oder zweimalige Ausführung der Operationen (8) ($k_n = 1$ oder 2) genügen, um die Beträge $|\eta_{n+1,\nu}^k - \eta_{n+1,\nu}^{k-1}|$ hinreichend klein zu machen.

Wählt man z. B. $r = 3$, $p = 2$ und setzt man in (8) $(1, \nu)_\varrho^3 = (0, \nu)_\varrho^3 - (0, 1)_\varrho^3$, wobei die Zahlen $(0, \nu)_\varrho^3$ der Tafel 1 zu entnehmen sind, so erhält man das folgende Rechenschema:

ν	$\longrightarrow$	f_{n0}^k	f_{n1}^k	f_{n2}^k	f_{n3}^k	N_ν
0	$N_\nu \dfrac{\eta_{n\nu}^{k+1} - \eta(x_{n-1})}{h}$	−9	−19	5	−1	24
2		−1	13	13	−1	24
3		0	1	4	1	3
4	$8 \dfrac{\eta_{n,4}^{k+1} - \eta(x_{n-1})}{h}$	−3	15	−9	21	8
	$3 \dfrac{\eta_{n4}^{k+1} - \eta(x_n)}{h}$	−1	4	−5	8	3

2. Ein und dasselbe Polynom kann auch in zwei oder mehreren Interpolationsintervallen als Näherung für $y(x)$ dienen. Hiermit wird die Integration der Differentialgleichung in zwei oder mehreren solchen Intervallen zugleich vollzogen. Soll dies z. B. von x_{m-q} bis x_m geschehen, so sei

$$\bar{x}_{m\varrho} = x_{m-\bar{p}+\varrho}, \quad q \leq \bar{p} \leq r, \quad \varrho = 0, 1 \ldots r, \quad \bar{\eta}_{m\varrho}^k = \bar{\eta}_m^k(\bar{x}_{m\varrho}), \quad \bar{f}_{m\varrho}^k = f(\bar{x}_{m\varrho}, \bar{\eta}_{m\varrho}^k)$$

und $\bar{\eta}_m^k = \bar{\eta}_m^k(x)$ das Polynom $r+1$-ten Grades

$$\bar{\eta}_m^k = \eta(x_{m-q}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{f}_{m\varrho}^{k-1} \left(\bar{p} - q, \frac{x - x_{m0}}{h}\right)_\varrho^r .$$

Unterscheiden sich die Zahlen

$$\bar{\eta}_{m\nu}^k = \eta(x_{m-q}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} \bar{f}_{m\varrho}^{k-1} (\bar{p} - q, \nu)_\varrho^r , \quad \nu = 0, 1 \ldots r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

für $k \geq k_m$ hinreichend wenig von $\bar{\eta}_{m\nu}^{k-1}$, so setzen wir

$$\eta(x) = \bar{\eta}_m^{k_m}(x) \text{ für } x_{m-q} < x \leq x_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Soll die Integration in gleicher Weise von x_m bis x_{m+q} fortgesetzt werden, so kann man für $\nu = 0, 1 \ldots r - q$ etwa $\bar{\eta}^0_{m+q,\nu} = \bar{\eta}^0_{m,\nu+q}$, und für $\nu = r - q + 1, r - q + 2, \ldots$ auf Grund q-maliger Extrapolation nach (10)

$$\bar{\eta}^0_{m+q,\nu} = \bar{\eta}^0_{m+q,\mu} + h \sum_{\varrho=0}^{r} (r + 1 + \mu - \nu,\ r+1)^r_\varrho \bar{f}^0_{m+q,\nu-r-1+\varrho}$$

annehmen. Hierbei ist $\nu - r - 1 \leq \mu < \nu$. Diese Beziehungen können auch wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{\eta}^0_{m+q}(x_\tau) = \bar{\eta}^0_m(x_\tau) \text{ für } \tau = m - \bar{p} + q,\ m - \bar{p} + q + 1, \ldots m - \bar{p} + r$$

und

$$\bar{\eta}^0_{m+q}(x_\tau) = \bar{\eta}^0_{m+q}(x_\sigma) + h \sum_{\varrho=0}^{r} (r + 1 + \sigma - \tau,\ r+1)^r_\varrho f(x, \bar{\eta}^0_{n+q})_{x_{\tau-r-1+\varrho}},$$

$$\tau - r - 1 \leq \sigma < \tau, \text{ für } \tau = m - \bar{p} + r + 1,\ m - \bar{p} + r + 2, \ldots m - \bar{p} + r + q.$$

Eine vergleichende Beurteilung der in verschiedenen Fällen zu erwartenden Genauigkeit läßt es als empfehlenswert erscheinen, die Interpolationsstellen symmetrisch zum Intervall x_{m-q}, x_m anzuordnen; d. i. entsprechend der Gleichung $r + q = 2\bar{p}$.

Wählt man z. B. $r = 2, \bar{p} = 2, q = 2, \mu = \nu - 3$, so gilt das Rechenschema:

$\longrightarrow$	$\bar{f}^{k-1}_{m,0}$	$\bar{f}^{k-1}_{m,1}$	$\bar{f}^{k-1}_{m,2}$	.
$\frac{12}{h}\left[\bar{\eta}^k_{m,1} - \eta(x_{m-2})\right]$	5	8	−1	.
$\frac{3}{h}\left[\bar{\eta}^k_{m,2} - \eta(x_{m-2})\right]$	1	4	1	.
$\longrightarrow$	$\bar{f}^0_{m+2,-2}$	$\bar{f}^0_{m+2,-1}$	$\bar{f}^0_{m+2,0}$	$\bar{f}^0_{m+2,1}$
$\frac{4}{h}\left(\eta^0_{m+2,1} - \eta^0_{m+2,-2}\right)$	3	0	9	.
$\frac{4}{h}\left(\eta^0_{m+2,2} - \eta^0_{m+2,-1}\right)$	.	3	0	9

An späterer Stelle (Abschnitt **5**) machen wir davon Gebrauch, daß man von einer Näherung, die nach dem eben beschriebenen Verfahren genommen wurde, auch annehmen kann, sie sei durch Integration nach Ziffer 1 gefunden worden. Hierzu setzen wir im Nachhinein für $x_{n-1} < x \leq x_n$, $n = m - q + 1,\ m - q + 2, \ldots m$: $p = \bar{p} - q + 1,\ \bar{p} - q + 2, \ldots \bar{p}$ und $\eta_n{}^0 = \bar{\eta}_m{}^{k_m - 1}$.

Dann findet man nach (7) $\eta_n{}^1 = \bar{\eta}_m{}^{k_m}$. In den angeführten Intervallen ist in Übereinstimmung mit (2) und (7): $\eta(x) = \eta^{k_n}(x)$ mit $k_n = 1$.

3. Beziehungen zu anderen Methoden.

1. Die in Betracht kommenden Integrationsverfahren beruhen auf gewissen Quadraturformeln, die nun mit den hier verwendeten verglichen werden sollen. Hierbei bezeichne:

$F(x)$ den Integranden, $G(x)$ das zugehörige Interpolationspolynom r-ten Grades mit den Interpolationsstellen $x_\mu = x_0 + \mu h$, $\mu = 0, 1 \ldots r$, ($r = 2s$ oder $r = 2s + 1$), $F_\mu = F(x_\mu) = G(x_\mu)$ die Funktionswerte daselbst, $\Delta_\mu{}^\nu$, $\nu = 1, 2 \ldots r$, $\mu = \nu, \nu + 1, \ldots r$ die aufsteigenden (hinteren oder linken) Differenzen nach dem Schema:

$$\Delta^1_\mu = F_\mu - F_{\mu-1}, \quad \Delta^\nu_\mu = \Delta^{\nu-1}_\mu - \Delta^{\nu-1}_{\mu-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

(μ, ν), $\mu = \frac{\nu}{2}, \frac{\nu-1}{2}, \ldots r - \frac{\nu}{2}$, $\nu = 0, 1 \ldots r$ die Funktionswerte, Differenzen und Mittelwerte nach dem Schema:

$$(\mu, 0) = F_\mu, \quad \left(\mu + \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}(F_\mu + F_{\mu+1}), \quad (\mu, \nu + 1) = \left(\mu + \frac{1}{2}, \nu\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}, \nu\right) \quad . \quad (2).$$

Wird $G(x)$ nach der Interpolationsformel von Newton-Gregory, oder, in den Fällen $r=2s$ und $r=2s+1$, nach den Formeln von Stirling und von Bessel dargestellt und wie folgt integriert, so ergeben sich die bekannten Quadraturformeln[2]):

$$\frac{1}{h}\int_{x_r}^{x_{r+1}} G(x)\,dx = F_r + \frac{1}{2}\Delta_r^1 + \frac{5}{12}\Delta_r^2 + \frac{3}{8}\Delta_r^3 + \ldots \quad (3a),$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_{r-1}}^{x_r} G(x)\,dx = F_r - \frac{1}{2}\Delta_r^1 - \frac{1}{12}\Delta_r^2 - \frac{1}{24}\Delta_r^3 - \ldots \quad (3b),$$

$$\frac{1}{2h}\int_{x_{s-1}}^{x_{s+1}} G(x)\,dx = (s,0) + \frac{1}{6}(s,2) - \frac{1}{180}(s,4) \ldots \quad (4),$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_s}^{x_{s+1}} G(x)\,dx = \left(s+\frac{1}{2},0\right) - \frac{1}{12}\left(s+\frac{1}{2},2\right) + \frac{11}{720}\left(s+\frac{1}{2},4\right) \ldots \quad (5).$$

Existieren die benötigten Ableitungen von $F(x)$ und bedeutet q eine Zahl des Intervalls $-1 \leqq q \leqq 1$, so lassen sich die Beziehungen zwischen den erwähnten Quadraturformeln und solchen auf Grund der Lagrangeschen Formeln unter Beachtung der Restglieder mit Hilfe der Zahlen $(\mu,\nu)_\varrho^\nu$ wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{x_r}^{x_r+qh} F(x)\,dx - h^{r+1} F^{(r+1)}(\xi_1)\,(r,q+r)_{r+1}^{r+1} = \frac{1}{h}\int_{x_r}^{x_r+qh} G(x)\,dx \\ &= \sum_{\varrho=0}^{r}{}' (1-q,1)_0^\varrho\, \Delta_0^\varrho = \sum_{\varrho=0}^{r}{}' (r,r+q)_\varrho^r\, F_\varrho \end{aligned}\right\} \quad (3'),$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{x_s-qh}^{x_s+qh} F(x)\,dx - h^{2s+2} F^{(2s+2)}(\xi_2)\,(s+1-q,s+1+q)_{2s+2}^{2s+2} = \frac{1}{h}\int_{x_s-qh}^{x_s+qh} G(x)\,dx \\ &= \sum_{\sigma=0}^{s}{}' (\sigma-q,\sigma+q)_{2\sigma}^{2\sigma}\,(s,2\sigma) = \sum_{\varrho=0}^{2s}{}' (s-q,s+q)_\varrho^{2s}\, F_\varrho \end{aligned}\right\} \quad (4'),$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{x_s+qh}^{x_s+(1-q)h} F(x)\,dx - h^{2s+2} F^{(2s+2)}(\xi_3)\,(s+q,s+1-q)_{2s+2}^{2s+2} = \frac{1}{h}\int_{x_s+qh}^{x_s+(1-q)h} G(x)\,dx \\ &= \sum_{\sigma=0}^{s}{}' (\sigma-1+q,\sigma-q)_{2\sigma}^{2\sigma}\left(s+\frac{1}{2},2\sigma\right) = \sum_{\varrho=1}^{2s+1}{}' (s+q,s+1-q)_\varrho^{2s+1}\, F_\varrho \end{aligned}\right\} \quad (5').$$

Hierbei ist $x_0 \leqq \xi_i \leqq x_r$, $i=1,2,3$, für $q>0$: $x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_r + qh$. Stellt man die Differenzen und die Mittelwerte durch die Funktionswerte dar und setzt man hier $q=\pm 1$, 1 und 0, so übergehen die Ausdrücke (3), (4) und (5) in (3′), (4′) und (5′).

2. Fortlaufende Extrapolation nach Steffensen. Sind $\eta(x_{m-\mu})$, $\mu = 1, 2 \ldots r+2$ bereits bekannte, ausreichend genaue Näherungen für $y(x_{m-\mu})$, so ist

$$\eta(x_m) = \eta(x_{m-r-2}) + h\sum_{\varrho=0}^{r}{}' f(x_\iota\,\eta[x_\iota])\,(-1,r+1)_\varrho^r,\ \iota = m-r-1+\varrho \quad (22)$$

die Näherung für $y(x_m)$, die nach diesem Verfahren gewonnen wird[3]).

[2]) Siehe etwa Willers: Methoden der praktischen Analysis, §§ 10, 12, Formeln (13), (23), (28) und (1), (10), (6).

[3]) Interpolation by Steffensen, Baltimore, 1927, § 17. Für die Koeffizienten $F_0, F_{\pm 1}, \ldots$ in den dort verwendeten Quadraturformeln des offenen Typus gilt bei geradem und bei ungeradem r

$$(r+2)\,F_{\pm\nu} = (-1,r+1)_{\frac{r}{2}\pm\nu}^{r},\quad \nu = 0,1,\ldots\frac{r}{2} \quad\text{und}\quad (r+2)\,F_{\pm 1\pm\nu} = (-1,r+1)_{\frac{r\pm 1}{2}\pm\nu}^{r},\quad \nu = 0,1\ldots\frac{r-1}{2}.$$

Benutzt man die Bezeichnungen, die im Abschnitt **2** verwendet werden, setzt man $p = r + 1$, $x_{m\varrho} = x_{m-r-1+\varrho}$, $\varrho = 0, 1 \ldots r$, $\eta^0_{m\varrho} = \eta(x_{m\varrho})$, $f^0_{m\varrho} = f(x_{m\varrho}\, \eta^0_{m\varrho})$ und bedeutet $\eta_m{}^1 = \eta_m{}^1(x)$ das Integral des Interpolationspolynoms, das bei der numerischen Quadratur (22) integriert wird, so ist

$$\eta^1_m(x) = \eta(x_{m-r-2}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f^0_{m\varrho} \left(-1, \frac{x - x_{m0}}{h}\right)^r_\varrho \quad \text{und} \quad \eta^1_m(x_m) = \eta(x_m) \quad . \quad . \quad (23).$$

Setzt man dieses Verfahren fort und betrachtet man die Funktion $\eta(x) = \eta_n{}^1(x)$, für $x_{n-1} < x \leq x_n$, $n = m$, $m + 1, \ldots$, so hat man $r + 2$ stetige Kurven durch die Punkte $x, \eta(x)$, $x = x_{m-r-2}, x_{m-r-1}, \ldots x_{m-1}$. Jede Kurve besteht aus Parabelbogen $r + 1$-ten Grades, deren jeder sich über $r + 2$ Intervalle erstreckt und über dem letzten dieser Intervalle die Funktion $\eta(x)$ darstellt. Diese ist in den Punkten $x_{m-1}, x_m, \ldots$ unstetig.

4. Fehlerabschätzung bei Näherungslösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Es sei eine Funktion $z = z(x)$ vorgelegt und der Betrag $|y - z|$ zu schätzen, um den man z ändern muß, wenn man das partikuläre Integral $y = y(x)$ von $y = f(x, y)$ erhalten will.

Von $z(x)$ wird vorausgesetzt, daß die Punkte $x, y = z(x)$ der x, y-Ebene für $x_0 \leq x \leq x_0 + l$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ enthalten sind. Außerdem nehmen wir vorläufig noch an, daß $z(x)$ stetig und differenzierbar sei. Bei Näherungslösungen für $y(x)$ wird diese Voraussetzung häufig nicht zutreffen. Die Änderungen, die in solchen Fällen an den folgenden Abschätzungen vorzunehmen sind, ermitteln wir an späterer Stelle.

Wir bezeichnen mit

$v = v(x) = v(x, z) = y - z$ die an $z(x)$ anzubringende Berichtigung, mit

$$w = w(x) = w(x, z) = f(x, z) - z' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

den Widerspruch, der auftritt, wenn man z statt y in $y' = f(x, y)$ einsetzt, mit

$$u = u(x) = u(x, z) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, z)\, dx - z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die erste Verbesserung von z, die sich ergibt, wenn man in einem Iterationsverfahren nach **1** (4) $y^0 = z$ und dementsprechend $y^1 = z + u$ setzt.

Offenbar ist $u' = w$. Setzt man in (1) und (2) $z' = y' - v' = f(x, y) - v'$ und $z = y - v$ $= y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx - v$, so wird

$$v' = f(x, y) - f(x, z) + w\,, \qquad v = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, z)]\, dx + u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3, 4).$$

Es sei nun $Q = Q(x)$ eine Funktion, die der Bedingung

$$|f(x, y) - f(x, z)| : |y - z| \leq Q(x) \leq B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

genügt.

Kann man vermuten, daß sich z nur wenig von y unterscheidet, so ergeben sich Anhaltspunkte zu einer schätzungsweisen Beurteilung des Verlaufes von $Q(x)$, wenn man $\partial f(x, z)/\partial z$, $z = z(x)$, oder Differenzenquotienten $[f(x, z_2) - f(x, z_1)] : (z_2 - z_1)$ für einige Werte von x oder für einige Punktpaare $x_1, z_1; x_2; z_2$ in der Nähe der Kurven $z = z(x)$ und $y = y(x)$ berechnet.

Führt man $Q(x)$ in (3) und (4) ein und berücksichtigt man, daß $|v|' \leq |v'|$ ist, so wird

$$|v|' - Q\,|v| \leq |w|\,, \qquad |v| - \int_{x_0}^{x} Q\,|v|\, dx \leq |u| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6, 7).$$

Wir dividieren (6) durch die beständig positive Funktion $S = S(x) = e^{\int_{x_0}^{x} Q\, dx}$, erhalten

$$\frac{d}{dx} \frac{|v|}{S} \leq \frac{|w|}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

integrieren von x_0 bis x und multiplizieren schließlich mit $S(x)$. Da das Zeichen $\leq$ bei diesen Operationen seine Geltung behält, ist

$$\left.\begin{aligned} &|v| - |v(x_0)|\, S \leqq S \int_{x_0}^{x} \frac{|w|}{S}\, d\,x\,, \\ &|y(x) - z(x)| \leqq V \quad \text{und} \quad V = V(x) = S\left[\,|y(x_0) - z(x_0)| + \int_{x_0}^{x} \frac{|w|\, d\,x}{S}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

eine Oberfunktion für $|v|$.

Führt man in (7) die neue Veränderliche $\varphi = \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} Q\,|v|\,d\,x$ ein, so wird $\varphi' - Q\varphi \leqq Q\,|u|$, $\varphi(x_0) = 0$. Nach dem gleichen Verfahren wie bei (6) ergibt sich

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{\varphi}{S} \leqq \frac{|u|\,Q}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

und $\varphi \leqq S \int_{x_0}^{x} \frac{|u|\,Q}{S}\, d\,x$. Zufolge (7) ist $|v| - \varphi \leqq |u|$; daher

$$|y(x) - z(x)| \leqq |u| + U\,, \qquad U = S \int_{x_0}^{x} \frac{|u|\,Q}{S}\, d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Um die in (9) und (11) auftretenden Oberfunktionen für $|y - z|$ zu vergleichen, setzen wir in V $|w| \geqq |u|'$, integrieren teilweise und erhalten

$$\int_{x_0}^{x} \frac{|w|}{S}\, d\,x \geqq \int_{x_0}^{x} \frac{|u|'}{S}\, d\,x = \frac{|u|}{S} - |u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} \frac{|u|}{S}\, Q\, d\,x\,.$$

Hiernach ist

$$V = S\left[\,|u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} \frac{|w|}{S}\, d\,x\right] \geqq |u| + U \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12),$$

also $|u| + U$ jedenfalls keine größere, wenn $w = u'$ von x_0 bis x nicht zeichenbeständig ist, sogar eine kleinere Oberfunktion für $|y - z|$ als V. Dafür erfordert die Berechnung von $|u| + U$ eine Quadratur mehr als die Berechnung von V.

Wird eine Konstante C so angenommen, daß die Bedingung $Q(x) \leqq C \leqq B$ für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + I$ erfüllt ist, und setzt man zur Abkürzung $\overline{w}(x) = \text{fin sup}\,|w(\xi)|$, $\bar{u}(x) = \text{fin sup}\,|u(\xi)|$ für $x_0 \leqq \xi \leqq x$, so folgen aus (9) und (11) die Beziehungen:

$$|y(x) - z(x)| \leqq |y(x_0) - z(w)|\, e^{C(x - x_0)} + \overline{w}(x)\, \frac{e^{C(x - x_0)} - 1}{C} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13),$$

$$|y(x) - z(x)| \leqq |u(x)| + \bar{u}(x)(S - 1) \leqq |u(x)| + \bar{u}(x)\left(e^{C(x - x_0)} - 1\right) \quad . \; . \quad (14)$$

für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + I$.

2. Wir nehmen nun an, $z(x)$ sei eine stückweise glatte Funktion, d. i. eine stückweise stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung.

Eine Funktion wird in einem Intervall als stückweise stetig bezeichnet, wenn es eine Zerlegung des Intervalls in endlich viele Teilgebiete gibt, so daß die Funktion im Innern eines jeden von ihnen stetig ist und sich bei Annäherung an den Rand eines jeden Teilgebietes von innen her bestimmten endlichen Grenzwerten nähert[4]).

Da y und y' stetig sind, sind $v = y - z$ und $u = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, z)\, d\,x - z$ stückweise glatt und haben dieselben Sprungstellen wie z, jedoch mit entgegengesetzten Sprüngen. Die Funktionen v' und $w = u'$ sind stückweise stetig, φ ist stetig.

Die Beziehungen (1) bis (8) und (10) gelten in den inneren Punkten der Teilgebiete, in denen die Funktionen, die in den Beziehungen auftreten, stetig sind, und für die linken und die rechten Grenzwerte dieser Funktionen an den Sprungstellen.

Es bezeichne

$$z(\xi_\sigma + 0) - z(\xi_\sigma - 0) = c_\sigma\,, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots\, s - 1\,,$$

[4]) R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik.

die Sprünge von $z(x)$ und c_0 die Zahl

$$c_0 = v(x_0) = y(x_0) - z(x_0).$$

Setzt man $x_0 = \xi_0$, $x_0 + l = \xi_s$, so sei $\xi_{\sigma-1} < \xi_\sigma$, $\sigma = 1, 2 \dots s$.

Integriert man (8) in den Teilgebieten, in die das Intervall $< x_0, x >$ durch die Unstetigkeitspunkte von $|w|$ zerlegt wird und addiert man die Integrale, so erhält man die Ungleichung

$$\frac{|v(x)|}{S} - |v(x_0)| - \sum_{\sigma=1}^{\tau-1} \frac{|v(x)|}{S(x)}\Bigg|_{\xi_\sigma - 0}^{\xi_\sigma + 0} \leqq \int_{x_0}^{x} \frac{|w|}{S}\, dx \text{ für } \xi_{\tau-1} < x < \xi_\tau .$$

Setzt man $|v(\xi_\sigma + 0)| \leqq |v(\xi_\sigma - 0)| + |c_\sigma|$, und multipliziert man mit S, so ergeben sich an Stelle von (11) und (13) die Beziehungen[5]):

$$|y(x) - z(x)| \leqq V, \quad V = V(x) = S\left\{\sum_{\sigma=0}^{\tau-1} \frac{|c_\sigma|}{S(\xi_\sigma)} + \int_{x_0}^{x} \frac{|w|}{S}\, dx\right\} \quad \dots\dots \quad (11'),$$

$$|y(x) - z(x)| \leqq \sum_{\sigma=0}^{\tau-1} |c_\sigma| e^{C(x-\xi_\sigma)} + \overline{w}(x)\frac{e^{C(x-x_0)} - 1}{C}, \text{ für } \xi_{\tau-1} < x < \xi_\tau \quad (13').$$

Wird (10) in ähnlicher Weise behandelt wie (8), so zeigt sich, daß die Beziehungen (11) und (14) unverändert bleiben, wenn $z(x)$ stückweise stetig ist.

3. Bei den Methoden nach den Abschnitten **2** und **3** kann man als Näherungen für $y(x)$ in den einzelnen Integrationsintervallen jene Polynome betrachten, die durch Integration der Interpolationspolynome entstehen, durch die die Integranden bei den numerischen Quadraturen approximiert sind.

Wurde ein Iterationsverfahren nach **1** (5) und (6) durchgeführt und setzt man $z = y^{k_n}$ und dementsprechend $u(x) = y^{k_n+1} - y^{k_n}$, beides für $x_{n-1} < x \leqq x_n$, $n = 1, 2 \dots N$, so ergibt sich $|y(x) - Y(x)| \leqq |y^{k_n+1} - y^{k_n}| + \bar{u}(x_n)(S-1)$ für $x_0 < x \leqq x_n$, $n = 1, 2 \dots N$.

4. Zur Fehlerabschätzung bei Näherungslösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen verwenden wir gewisse Maßzahlen, die jeder Matrix zugeordnet werden können. Im folgenden bezeichnen wir Matrizen im allgemeinen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$, solche mit einer Spalte auch mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$, die sogleich zu definierenden Maßzahlen mit $\varrho_i\{\mathfrak{A}\}, \dots \varrho_i\{\mathfrak{b}\}, \dots$ $i = 1, 2, 3, 4$, — bei Aussagen, die für $i = 1, 2, 3$ und 4 gelten, mit $\varrho\{\mathfrak{A}\}, \dots, \varrho\{\mathfrak{a}\} \dots$.

Ist $\mathfrak{A} = \{a_{\mu\nu}\}$, $\mu = 1, 2 \dots m$, $\nu = 1, 2 \dots n$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, $\mathfrak{A}^* = \{a_{\nu\mu}\}$ die transponierte, $\overline{\mathfrak{A}} = \{\bar{a}_{\mu\nu}\}$ die konjugierte, $\overline{\mathfrak{A}}^* = \{\bar{a}_{\nu\mu}\}$ die transponiert-konjugierte Matrix, $|\mathfrak{A}| = \{|a_{\mu\nu}|\}$ die Matrix der Moduln von $\mathfrak{A}$, so seien

$$\varrho_1\{\mathfrak{A}\} = \sup_{\mu} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| \quad \text{und} \quad \varrho_3\{\mathfrak{A}\} = \sup_{\nu} \sum_{\mu=1}^{m} |a_{\mu\nu}|$$

jene Zeilensumme und jene Spaltensumme von $|\mathfrak{A}|$, die nicht kleiner ist als die übrigen solchen Summen,

$$\varrho_4\{\mathfrak{A}\} = \left|\left(\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right| = \left|\left(\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|,$$

die positive Quadratwurzel aus der Spur, d. i. aus der Summe der Hauptdiagonalglieder der Matrix

$$\overline{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} = \left\{\sum_{\mu=1}^{m} \bar{a}_{\mu\nu} a_{\mu\varrho}\right\}, \quad \nu, \varrho = 1, 2, \dots n,$$

endlich $\varrho_2\{\mathfrak{A}\}$ die positive Quadratwurzel aus jener charakteristischen Zahl von $\overline{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}$, die nicht kleiner ist als die übrigen solchen Zahlen, also $[\varrho_2\{\mathfrak{A}\}]^2$ das Maximum der Form $\bar{\mathfrak{x}}^* \overline{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}\, \mathfrak{x}$ mit der Nebenbedingung $\bar{\mathfrak{x}}^* \mathfrak{x} = 1$ für im übrigen beliebige $\mathfrak{x} = \{x_\nu\}$.

[5]) Im Beispiel $y' = y$, $y(0) = 1$, $z(x) = \frac{1}{n}$ für $n - 1 < x \leqq n$, $n = 1, 2 \dots$ ist $|v| = V = e^x - \frac{1}{n}$, für $n - 1 < x \leqq n$, die angegebene Oberfunktion V tatsächlich von $|y - z|$ erreicht.

Ist $\mathfrak{a} = \{a_\nu\}$, so folgt aus diesen Definitionen:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_1\{\mathfrak{a}\} = \sup\limits_{\nu} |a_\nu|, \ \varrho_2\{\mathfrak{a}\} = \varrho_4\{\mathfrak{a}\} = \left|\sqrt{\bar{\mathfrak{a}}^*\mathfrak{a}}\right| = \left|\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\bar{a}_\nu a_\nu\right)^{\frac{1}{2}}\right| \\ \varrho_3\{\mathfrak{a}\} = \sum\limits_{\nu=1}^{n}|a_\nu|, \quad \varrho\{|\mathfrak{a}|\} = \varrho\{\mathfrak{a}\}, \quad |a_\nu| \leq \varrho\{\mathfrak{a}\}, \ (\nu = 1, 2 \ldots n) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (16),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\varrho_2\{\mathfrak{a}\} \leq \varrho_1\{\mathfrak{a}\} \leq \varrho_2\{\mathfrak{a}\} = \varrho_4\{\mathfrak{a}\} \leq \varrho_3\{\mathfrak{a}\} \leq \sqrt{n}\,\varrho_2\{\mathfrak{a}\} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Ist $\quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, so ist $\varrho\{\mathfrak{a}\} = 0$ und umgekehrt . . . . (18).

Ist $\quad |a_\nu| \leq |b_\nu|$, $\nu = 1, 2 \ldots n$. $(|\mathfrak{a}| \leq |\mathfrak{b}|)$, so ist $\varrho\{\mathfrak{a}\} \leq \varrho\{\mathfrak{b}\}$ . . . . (19).

Ist $\quad k\mathfrak{A} = \{k\, a_{\mu\nu}\}$, so ist $\varrho\{k\mathfrak{A}\} = |k|\,\varrho\{\mathfrak{A}\}$ . . . . (20).

Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleich viele Zeilen und Spalten[6]), so gilt die „Dreiecksungleichung“

$$\varrho\{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\} \leq \varrho\{\mathfrak{A}\} + \varrho\{\mathfrak{B}\} \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

Hat $\mathfrak{C}$ so viele Zeilen wie $\mathfrak{A}$ Spalten, so gilt die „Schwarzsche“ Ungleichung

$$\varrho\{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\} \leq \varrho\{\mathfrak{A}\}\,\varrho\{\mathfrak{C}\} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Sind $\varkappa_\sigma$, $\sigma = 1, 2 \ldots s$ die charakteristischen Zahlen[7]) einer quadratischen Matrix $\mathfrak{Q}$, so erfüllen die Moduln $|\varkappa_\sigma|$ die Ungleichungen

$$|\varkappa_\sigma| \leq \varrho_i\{\mathfrak{Q}\}, \quad \sigma = 1, 2 \ldots s, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Die vier Maßzahlen $\varrho_i = \varrho_i\{\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} = \{a_{\mu\nu}\}$ genügen den Ungleichungen:

$$\frac{\varrho_1}{\sqrt{n}} \leq \varrho_2 \leq \varrho_4 \leq \sqrt{m}\,\varrho_1, \quad \frac{\varrho_3}{\sqrt{m}} \leq \varrho_2 \leq \varrho_4 \leq \sqrt{n}\,\varrho_3, \quad \varrho_1 \leq n\,\varrho_3, \quad \varrho_3 \leq m\,\varrho_1 \quad (24).$$

Bezeichnet $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = \{x_\nu(t)\}$ ein System stückweise stetiger Funktionen, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t) = \{y_\nu(t)\}$ ein System stückweise glatter Funktionen und $D\mathfrak{y} = \{D\,y_\nu(t)\}$ Derivierte, so gilt:

$$\varrho\left\{\int_a^b \mathfrak{x}\,dt\right\} \leq \int_a^b \varrho\{\mathfrak{x}\}\,dt \qquad D\varrho\{\mathfrak{y}\} \leq \varrho\{D\mathfrak{y}\} \quad \ldots\ldots \quad (25,\ 26).$$

Es sei nun

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) \quad \ldots\ldots \quad (27),$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \quad \nu = 1, 2 \ldots n$$

ein System von n Differentialgleichungen, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ die partikuläre Lösung mit den Anfangswerten $\mathfrak{y}(x_0)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$ ein System stetiger, stückweise glatter Funktionen, dessen Abweichung von $\mathfrak{y}$ geschätzt werden soll, und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(x) = \{Q_{\mu\nu}\}$, $\mu, \nu = 1, 2 \ldots n$ eine Matrix, deren Elemente $Q_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}(x) \geq 0$ so angenommene, reelle, nicht negative Funktionen von x sind, daß das System von n Ungleichungen:

$$|\mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z})| \leq \mathfrak{Q}\,|\mathfrak{y} - \mathfrak{z}| \quad \ldots\ldots \quad (28),$$

$$\left(|f_\mu(x, y_1 \ldots y_n) - f(x, z_1 \ldots z_n)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\mu\nu}\,|y_\nu - z_\nu|, \ \mu = 1, 2 \ldots n\right)$$

im Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + I$ erfüllt ist.

Setzt man $\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = \mathfrak{v}$, so folgt aus (28) und (22)

$$\varrho\{\mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z})\} \leq \varrho\{\mathfrak{Q}\}\,\varrho\{\mathfrak{v}\} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

Ist das System (27) linear und $\mathfrak{Q}$ die Matrix seiner Koeffizienten unter Wegfall der Beschränkung $\mathfrak{Q} \geq 0$, also etwa $\mathfrak{y}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{y} + \mathfrak{q}$, so folgt (29) aus $\mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}\mathfrak{v}$.

Setzt man

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(x) = \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z}) - \mathfrak{z}'; \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x) = \mathfrak{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z})\,dx - \mathfrak{z} \quad \ldots \quad (30,\ 31),$$

[6]) Die Beweise für die folgenden Behauptungen sind leicht zu erbringen, müssen jedoch Raummangels halber fortbleiben.

[7]) Das sind Zahlen mit der Eigenschaft, daß das System $\mathfrak{Q}\mathfrak{x} - \varkappa\mathfrak{x} = 0$ dann und nur dann wenigstens eine nicht verschwindende Lösung $\mathfrak{x}$ besitzt, wenn $\varkappa$ eine dieser Zahlen ist.

so erhält man

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z}) + \mathfrak{w}; \quad \mathfrak{v} = \int_{x_0}^{x} [\mathfrak{f}(x, \mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(x, \mathfrak{z})]\, d x + \mathfrak{u}$$

und mit Hilfe der Beziehungen (21), (25), (26) und (29) die Ungleichungen:

$$\varrho' \{\mathfrak{v}\} - \varrho\{\mathfrak{Q}\}\, \varrho\{\mathfrak{v}\} \leq \varrho\{\mathfrak{w}\}; \quad \varrho\{\mathfrak{v}\} - \int_{x_0}^{x} \varrho\{\mathfrak{Q}\}\, \varrho\{\mathfrak{v}\}\, d x \leq \varrho\{\mathfrak{u}\} \quad . \; . \; (32, 33).$$

Behandelt man diese Ungleichungen ähnlich wie (6) und (7) und schreibt man zur Abkürzung

$$S = e^{\int_{x_0}^{x} \varrho\{\mathfrak{Q}\}\, d x}, \quad V = S \left| \varrho\{\mathfrak{y}(x_0) - \mathfrak{z}(x_0)\} + \int_{x_0}^{x} \frac{\varrho\{\mathfrak{w}\}}{S}\, d x \right|, \quad U = S \int_{x_0}^{x} \frac{\varrho\{\mathfrak{u}\}\, \varrho\{\mathfrak{Q}\}}{S}\, d x,$$

so ergibt sich

$$|y_\nu(x) - z_\nu(x)| \leq \varrho\{\mathfrak{u}\} + U \leq V, \quad \nu = 1, 2 \ldots n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

für $x_0 \leq x \leq x_0 + I$.

Sind die Funktionen $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$ stückweise stetig, $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{s-1}$ die Punkte, wo eine der Funktionen $z_\nu(x)$ unstetig wird, $\mathfrak{c}_\sigma$, $\sigma = 1, 2 \ldots s - 1$ die Sprünge von $\mathfrak{z}$, und setzt man $\xi_0 = x_0$, $\xi_s = x_0 + I$, $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{z}(x_0) - \mathfrak{y}(x_0)$, so hat man

$$V = S \left| \sum_{\sigma=0}^{\tau-1} \frac{\varrho\{\mathfrak{c}_\sigma\}}{S(\xi_\sigma)} + \int_{x_0}^{x} \frac{\varrho\{\mathfrak{w}\}}{S}\, d x \right| \quad \text{für} \quad \xi_{\tau-1} < x < \xi_\tau,$$

während der Ausdruck für U ungeändert bleibt.

Besteht das System (27) aus drei Gleichungen, so bedeutet jede der beiden in (34) angegebenen Oberfunktionen für $\varrho = \varrho_1$, für $\varrho = \varrho_2$ oder $\varrho = \varrho_4$ und für $\varrho = \varrho_3$ die halbe Kantenlänge eines Würfels, den Halbmesser einer Kugel und die Halbachsenlänge eines Oktaeders, wobei der Körper den einen der beiden Punkte $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{z}$ enthält, während sich der andere im Mittelpunkte des Körpers befindet.

5. Fehlerabschätzung beim vorliegenden Integrationsverfahren.

1. Als Näherung für $y(x_0)$ erhält man nach Abschnitt **2**, Ziffer **1**[8]) eine stetige, stückweise glatte Funktion $\eta(x)$, wobei $\eta(x_0) = y(x_0)$, $\eta(x) = \eta_n^{k_n}(x)$ für $x_{n-1} < x \leq x_n$, $n = 1, 2 \ldots N$ ist.

Als Widerspruch $w = w(x, \eta) = f(x, \eta) - \eta'$ ergibt sich dementsprechend die stückweise stetige Funktion

$$w(x, \eta) = f(x, \eta_n^{k_n}) - \frac{d\, \eta_n^{k_n}}{d x} \quad \text{für} \quad x_{n-1} < x \leq x_n.$$

Setzt man $w(x, \eta_n^{k_n}) = w_n(x) = w_n$, so gilt

$$w(x, \eta) = w_n(x) \quad \text{für} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Hierbei ist nach **2** (6)

$$w_n(x) = f(x, \eta_n^{k_n}) - \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1} \left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)_\varrho^r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Wie man leicht feststellt, ist $w(x_0, \eta[x_0]) = 0$.

Als erste Verbesserung $u = u(x, \eta) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, \eta)\, d x - \eta$ ergibt sich zufolge **4** (2) die stetige, stückweise glatte Funktion:

$$u(x, \eta) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} w_\nu\, d x + \int_{x_{n-1}}^{x} w_n\, d x \quad \text{für} \quad x_{n-1} < x \leq x_n, \quad u(x_0\, \eta[x_0]) = 0 \quad . \; . \; . \; (3).$$

In den meisten Fällen wird man eine zur Fehlerabschätzung ausreichende Genauigkeit erzielen, wenn man u für $x = x_1, x_2, \ldots x_N$ berechnet und die hierzu nötigen Quadraturen nach der Simpsonschen Formel vollzieht. Setzt man $w_n(x_{n\nu}) = w_{n\nu}$, so ist dann

[8]) Das Folgende gilt mit entsprechenden Änderungen auch für Näherungen nach Abschnitt 2, Ziffer 2.

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} w_n\,dx = \frac{h}{6}\left(w_{n,\,p-1} + 4\,w_{n,\,p-\frac{1}{2}} + w_{n,\,p}\right) + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \bar{R}_n\,dx \quad \ldots \quad (4),$$

wobei das Restintegral bei der numerischen Rechnung vernachlässigt wird.

Zur Ermittlung der erforderlichen Werte von w_n hat man nach **2** (6) und (7) die Gleichungen:

$$w_{n,\,p-\frac{1}{2}} = f\left(x_{n-\frac{1}{2}},\ \eta\left[x_{n-\frac{1}{2}}\right]\right) - \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1}\left(p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r} \quad \ldots \quad (5),$$

$$\eta\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) = \eta\left(x_{n-1}\right) + h\sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1}\left(p-1,\ p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r} \quad \ldots \quad (6),$$

$$w_{n\varrho} = f_{n\varrho}^{k_n} - f_{n\varrho}^{k_n-1} \quad \ldots \quad (7).$$

$$w_{n,\,r+1} = f_{n,\,r+1}^{k_n} - \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1}\left(r+1\right)_{\varrho}^{r} = f_{n,\,r+1}^{k_n} - \sum_{\varrho=0}^{r}\left(-1\right)^{r-\varrho}\binom{r+1}{\varrho} f_{n\varrho}^{k_n-1} \quad (8).$$

Ist dann $Q = Q(x)$ eine Funktion, oder C eine Konstante, derart, daß die Ungleichung $|f(x,y) - f(x,\eta)| : |y-\eta| \leqq Q, C \leqq B$ von $x = x_0$ bis $x = x_n$ erfüllt ist, so gilt nach **4** (11) oder **4** (14)

$$|y(x) - \eta(x)| \leqq |u(x_n, \eta[x_n])| + e^{\int\limits_{x_0}^{x_n} Q\,dx}\int\limits_{x_0}^{x_n} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} Q\,dx}\,|u|\,Q\,dx \quad \ldots \quad (9),$$

oder

$$|y(x) - \eta(x)| \leqq |u(x_n, \eta[x_n])| + \bar{u}_n\left(e^{Cnh} - 1\right),\ \bar{u}_n = \underset{x_0 \leqq x \leqq x_n}{\text{fin sup}}\,|u| \quad \ldots \quad (10)$$

für $x_0 \leqq x \leqq x_n$.

Die Koeffizienten $\left(p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r}$ $r = 1, 2 \ldots 5$, $p = 1, 2 \ldots r+1, \varrho = 0, 1 \ldots r$ sind in den Tafeln am Schlusse dieses Aufsatzes enthalten, die Koeffizienten $\left(p-1, p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r} = \left(0, p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r} - \left(0, p-1\right)_{\varrho}^{r}$ mit Hilfe der in diesen Tafeln enthaltenen Zahlen $\left(0, p-1\right)_{\varrho}^{r}$ und $\left(0, p-\frac{1}{2}\right)_{\varrho}^{r}$ leicht zu ermitteln. Für $r = 3$, $p = 2$ gilt z. B.:

$$\eta\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) = \eta\left(x_{n-1}\right) + \frac{h}{384}\left\{-9\,f_{n0}^{k_n-1} + 155\,f_{n1}^{k_n-1} + 53\,f_{n2}^{k_n-1} - 7\,f_{n3}^{k_n-1}\right\},$$

$$w_{n,\,p-\frac{1}{2}} = f\left(x_{n-\frac{1}{2}},\ \eta\left[x_{n-\frac{1}{2}}\right]\right) - \frac{1}{16}\left\{-f_{n0}^{k_n-1} + 9\,f_{n1}^{k_n-1} + 9\,f_{n2}^{k_n-1} - f_{n3}^{k_n-1}\right\}.$$

Konvergiert die Iteration **2** (8), so können die Beträge

$$|w_{n\varrho}| = |f_{n\varrho}^{k_n} - f_{n\varrho}^{k_n-1}| \leqq B\,|\eta_{n\varrho}^{k_n} - \eta_{n\varrho}^{k_n-1}|,\ \varrho = 0, 1 \ldots r$$

bei hinreichend großem k_n vernachlässigt werden. Dann erhält man $\frac{2}{3}\,h\,w_{n,\,p-\frac{1}{2}}$ für $1 \leqq p \leqq r$ und $\frac{2}{3}\,h\,w_{n,\,r+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\,h\,w_{n,\,r+1}$ für $p = r+1$ als Näherungen für $\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} w_n\,dx$.

2. Wird im allgemeinen eine Funktion $\Psi(x)$ mit stetiger $l+1$-ter Ableitung durch das Polynom l-ten Grades $G(x)$ mit den Interpolationsstellen $a_0, a_1, \ldots a_l$ approximiert, so kann man den Rest $R(x) = \Psi(x) - G(x)$ bekanntlich in der Form

$$R(x) = \Psi^{l+1}(\xi)\,\frac{\varphi(x)}{(l+1)!},\quad \varphi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_l) \quad \ldots \quad (11)$$

anschreiben. Hierbei ist ξ eine Funktion von x, deren Wert im Intervall von der kleinsten zur größten der Zahlen $x, a_1, a_2, \ldots a_l$ enthalten ist.

Wir approximieren nun w_n durch das Polynom r-ten Grades mit den Interpolationsstellen $x_{n\varrho}, \varrho = 0, 1 \ldots r$, setzen zur Abkürzung $x = x_{n0} + h\,t$, und $f(x, \eta_n^{k_n}) = F(x)$ und

nehmen an, daß $F_{(x)}^{r+1}$ von x_{n0} bis $x_{n,\,r+1}$ existiert. Da $w_n = F(x) - \frac{d\,\eta_n^{k_n}}{d\,x}$, $\frac{d\eta_n^{k_n}}{dx}$ ein Polynom r-ten Grades, ferner $t^{(r+1)}$ in jedem Interpolationsintervall zeichenbeständig ist, wird

$$w_n = \sum_{\varrho=0}^{r} w_{n\varrho} \left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)_{\varrho}^{r} + \frac{h^{r+1}\, t^{(r+1)}}{(r+1)!} F^{(r+1)}(\xi) \quad \text{. . . . . (12)}$$

und, nach Anwendung eines Mittelwertsatzes,

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} w_n\, d\,x = h \sum_{\varrho=0}^{r} w_{n\varrho} \left(p - 1,\, p\right)_{\varrho}^{r} + h^{r+2} \left(p - 1,\, p\right)_{r+1}^{r+1} F^{(r+1)}(\bar{\xi}) \quad \text{. . . . . . . (13).}$$

Hierbei genügen ξ und $\bar{\xi}$ der Ungleichung

$$x_{n0} \leq \xi, \bar{\xi} \leq x_{n,\,r} \quad \text{für } 1 \leq p \leq r,$$
$$x_{n0} \leq \xi, \bar{\xi} \leq x_{n,\,r+1} \quad \text{für } p = r + 1.$$

Konvergiert die Iteration **2** (8), so sind die Summen in (12) und (13) — erstere im Integrationsintervall — bei hinreichend großem k_n beliebig klein. Kann man die Summen in (12) vernachlässigen, so reduziert sich der Widerspruch w_n auf den Rest bei der Approximation von $f(x, \eta_n^{k_n})$ durch das Polynom $\sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n} \left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)_{\varrho}^{r}$.

In vielen Fällen ist es schwierig, die Beträge der in (12) und (13) auftretenden Ableitungen zu schätzen. Ersichtlich ist jedoch, daß $\left|(p-1, p)_{r+1}^{r+1}\right|$ am kleinsten ist, $\left|t^{(r+1)}\right|$ im Integrationsintervall am kleinsten bleibt, wenn dieses Intervall das mittlere oder eines der beiden mittleren der r Interpolationsintervalle ist. Um diese Faktoren in den zweiten Gliedern der Ausdrücke (12) und (13) möglichst klein zu halten, wird im Abschnitt **2** empfohlen, den Intervallen die angegebene Lage zu geben. Um die Beträge von $w_{n\varrho}$, $\varrho = 0, 1, \ldots r$ beliebig klein machen zu können, werden die Iterationen beim vorliegenden Verfahren auf sämtliche Interpolationsstellen $x_{n\varrho}$ erstreckt.

6. Konvergenz von Folgen verschiedener Näherungen.

Der Kürze halber beschränken wir uns hier auf Näherungen, die nach **2**, Ziffer 1 ermittelt werden können. Mit geringen Änderungen gilt das Folgende jedoch auch für Näherungen nach **2**, Ziffer 2.

Durch die numerischen Quadraturen, die man auszuführen hat, um einen Näherungswert $\eta(x_n)$ für $y(x_n)$ zu gewinnen, ergibt sich zu jedem Integrationsintervall $x_{n-1} < x \leq x_n$, $n = 1, 2 \ldots N$ eine Folge von Polynomen $\eta_n^k = \eta_n^k(x)$, $k = 1, 2 \ldots$, die unter Bedingungen, die sogleich formuliert werden sollen, konvergiert. Bezeichnet $\eta_n^* = \eta_n^*(x)$ das Grenzpolynom, so ist

$$\eta_n^* = \eta(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f(x_{n\varrho}, \eta_n^*[x_{n\varrho}]) \left(p - 1,\, \frac{x - x_{n0}}{h}\right),$$

$$\eta_n^*(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1}), \quad \frac{d\,\eta_n^*}{d\,x}\bigg|_{x_{n\varrho}} = f(x, \eta_n^*)\bigg|_{x_{n\varrho}}.$$

Ein solches Polynom ist auch dann vorhanden, wenn man $\eta(x_{n-1})$ gleich einer beliebigen Zahl aus einem gewissen Intervall annimmt. Daselbst ist η_n^* eine stetige Funktion von $\eta(x_{n-1})$ mit beschränkten Differenzenquotienten.

Die Parabeln höherer Ordnung, die den Polynomen η_n^k entsprechen, haben für $x = x_{n-1}$ genau, an den anderen Interpolationsstellen $x = \eta_{n\varrho}$ mit einer bei hinreichend großem k beliebigen Annäherung dieselbe Richtung wie das Feld der Differentialgleichung.

Unter den erwähnten Bedingungen gibt es eine stetige, wenn $1 \leq p \leq r$ gewählt wurde, außerdem noch glatte Funktion $H = H(x)$, die in jedem Integrationsintervall mit einem Grenzpolynom übereinstimmt. Bezeichnet $H_n = H_n(x)$ die Grenzpolynome, die den Bedingungen

$$H_n(x_{n-1}) = H_{n-1}(x_{n-1}), \quad n = 1, 2 \ldots N, \quad H_n(x_0) = y(x_0)$$

entsprechen, so ist

$$H(x) = H_n(x) \text{ für } x_{n-1} < x \leq x_n, \quad H(x_0) = y(x_0) \text{ und}$$

$$H_n = H_n(x) = H(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f(x_{n\varrho}, H_n[x_{n\varrho}]) \left(p - 1,\, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)_{\varrho}^{r}, \quad \frac{d\,H_n}{d\,x}\bigg|_{x_{n\varrho}} = f(x, H)\bigg|_{x_{n\varrho}}.$$

Wurde $1 \leqq p \leqq r$ gewählt, so gilt

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x_n} = f(x, H)\Big|_{x_n}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots N;$$

die Differentialgleichung wird von der Grenzfunktion in den Punkten $x = x_0, x_1, \ldots x_N$ erfüllt.

Durch wiederholte Integrationen der Differentialgleichung, bei denen die Zahlen N-tupel $k_1, k_2 \ldots k_N$ von Fall zu Fall geändert werden, h, r und p unverändert bleiben, erhält man verschiedene Funktionen $\eta(x)$. Jede Folge solcher Funktionen konvergiert gegen die Grenzfunktion $H(x)$, wenn jene der Zahlen $k_1, k_2 \ldots k_N$, die nicht größer ist als jede der übrigen, unbeschränkt wächst. (D. i. für $k_n \geqq k' \to \infty$.)

Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich $H(x)$ erheblich von $y(x)$ unterscheidet, was bei zu großem h, zu kleinem oder zu großem r, oder aus anderen Ursachen eintreten kann. Daher ist es in jedem Falle empfehlenswert, die Genauigkeit einer numerischen Lösung zu überprüfen.

Folgen verschiedener Näherungen $\eta(x)$, die mit verschiedenen Werten von h gewonnen werden, konvergieren in einem gewissen Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + I$ gegen $y(x)$, wenn h gegen Null strebt. Eine Näherung $\eta(x)$ wird daher verbessert, wenn man die Integration mit verkleinertem h wiederholt.

Es bezeichne nun a die Summe

$$a = \sum_{\varrho=0}^{r} \left|(p-1, p)_\varrho^r\right|,$$

b die kleinste Zahl, die den Ungleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} \left|(p-1, \sigma)_\varrho^r\right| - a(\sigma - p + 1) \leqq b, \quad \sigma = 0, 1 \ldots r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

genügt und $|\varkappa_i|$, $i = 1, 2 \ldots r+1$, die Moduln der charakteristischen Zahlen (reziproken Eigenwerte) der Matrix

$$\mathfrak{A} = \left\{ \left|(p-1, \sigma)_\varrho^r\right| \right\}, \quad \varrho, \sigma = 0, 1 \ldots r.$$

Zur Konvergenz der Polynome $\eta_n{}^k$, $k = 1, 2 \ldots$ und zur Existenz der Grenzfunktion $H(x)$ reicht es hin, wenn

1. der Bereich

$$x_0 - (p-1)h \leqq x \leqq x_0 + (N + r - p)h, \quad |y - y(x_0)| \leqq Ma(x - x_0) + Mbh \quad (2)$$

der xy-Ebene in $\mathfrak{B}$ enthalten,

2. $$Bh|\varkappa_i| < 1, \quad (i = 1, 2 \ldots r+1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist und

3. die Punkte $x_{n\nu}$, $\eta^0_{n\nu}$, $n = 1, 2 \ldots N$, $\nu = 0, 1 \ldots r$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ angenommen werden.

Zur Konvergenz $\eta(x) \to y(x)$ im Intervall $\langle x_0, x_0 + I \rangle$ für $h \to 0$ reicht es hin, wenn $\mathfrak{B}$ den Bereich (2) für $h = h'$, $N = N'$, $h'N' > I$ und die Punkte $x_{n\nu}$, $\eta^0_{n\nu}$ enthält und wenn außerdem entweder die Quotienten $|\eta^0_{n\nu} - \eta(x_{n-1})| : |x_{n\nu} - x_{n-1}|$ beschränkt oder die Zahlen $k_n \geqq 2$ sind.

Die Beweise folgen unter den Ziffern 2 bis 6, wobei der unter 1 angeführte Satz über Iterationen verwendet wird.

Unter 2 bis 6 ist vorausgesetzt, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

1. Es seien $F_\mu(z_1, z_2, \ldots z_m)$, $\mu = 1, 2 \ldots m$, oder, anders geschrieben $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$, m Funktionen von m Veränderlichen, die in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{Z}$ stetig sind, und den folgenden Bedingungen entsprechen.

(1) Ist $\mathfrak{z}$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{Z}$, so ist auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ ein Punkt aus $\mathfrak{Z}$.

(2) Ist $\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}$ ein beliebiges Punktpaar aus $\mathfrak{Z}$, so gibt es eine Matrix $\mathfrak{Q} = \{Q_{\mu\nu}\}$, $\mu, \nu = 1, 2 \ldots m$, von m^2 Konstanten, so daß die Ungleichungen

$$|\bar{F}_\mu - F_\mu| \leqq \sum_{\nu=1}^{m} Q_{\mu\nu} |z_\nu = z|, \qquad Q_{\mu\nu} \geqq 0,$$

oder, anders geschrieben, die Ungleichungen $|\mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{z}}) - \mathfrak{F}(\mathfrak{z})| \leqq \mathfrak{Q}|\bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{z}|$, $\mathfrak{Q} \geqq 0$, bestehen.

(3) Bezeichnet $|\varkappa_\mu|$, $\mu = 1, 2 \ldots m$ die Moduln der charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{Q}$, so ist $|\varkappa_\mu| < 1$ für $\mu = 1, 2 \ldots m$[9]).

[9]) Hierzu ist es nach **4**, 4, (23) hinreichend, wenn eine der Maßzahlen $\varrho_i\{\mathfrak{Q}\}$, $i = 1, 2, 3$ oder 4, kleiner ist als 1.

Ist dann $\mathfrak{z}^0$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{Z}$, so konvergiert die Folge $\mathfrak{z}^k = \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$ gegen einen von $\mathfrak{z}^0$ unabhängigen Punkt $\mathfrak{z}^*$, dessen Koordinaten die Gleichungen $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^*)$ erfüllen.

Beweis. Zunächst ergibt sich durch Induktion, daß alle Punkte der Folge $\mathfrak{z}^k$, $k = 0, 1 \ldots$ in $\mathfrak{Z}$ enthalten sind. Aus $\mathfrak{z}^{k+1} - \mathfrak{z}^k = \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^k) - \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^{k-1})$ folgt daher:

$$|\mathfrak{z}^{k+1} - \mathfrak{z}^k| \leq \mathfrak{Q}\,|\mathfrak{z}^k - \mathfrak{z}^{k-1}| \quad \ldots \quad (4).$$

Setzt man

$$|\mathfrak{z}^k - \mathfrak{z}^0| \leq |\mathfrak{z}^k - \mathfrak{z}^{k-1}| + |\mathfrak{z}^{k-1} - \mathfrak{z}^{k-2}| + \ldots + |\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^0| = \mathfrak{s}^k,\ k = 1, 2 \ldots,\ \mathfrak{s}^0 = 0 \quad (5),$$

$$|\mathfrak{z}^{l+k} - \mathfrak{z}^l| \leq |\mathfrak{z}^{l+k} - \mathfrak{z}^{l+k-1}| + |\mathfrak{z}^{l+k-1} - \mathfrak{z}^{l+k-2}| + \ldots + |\mathfrak{z}^{l+1} - \mathfrak{z}^l| = \mathfrak{s}^{l+k} - \mathfrak{s}^l \quad (6),$$

so erhält man durch gliedweise Anwendung von (4):

$$\mathfrak{s}^{l+k} - \mathfrak{s}^l \leq \mathfrak{Q}\,(\mathfrak{s}^{l+k-1} - \mathfrak{s}^{l-1}) \quad \ldots \quad (7).$$

Da die Matrix $\mathfrak{Q}$ keine negativen Elemente hat, gilt

$$\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x} \leq \mathfrak{Q}\,\mathfrak{y} \text{ für } \mathfrak{x} \leq \mathfrak{y} \quad \ldots \quad (8),$$

daher zufolge (7) $\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{s}^{l+k-1} - \mathfrak{s}^{l-1}) \leq \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{s}^{l+k-2} - \mathfrak{s}^{l-2})$ und nach wiederholter Anwendung

$$\mathfrak{s}^{l+k} - \mathfrak{s}^l \leq \mathfrak{Q}^l\,\mathfrak{s}^k \quad \ldots \quad (9).$$

Wegen $|\varkappa_\mu| < 1$, $\mu = 1, 2 \ldots m$, konvergiert die Folge $\mathfrak{Q}^l\,\mathfrak{s}^k$, $l = 1, 2 \ldots$ gegen einen Vektor mit verschwindenden Komponenten; es ist $\lim\limits_{l \to \infty} \mathfrak{Q}^l\,\mathfrak{s}^k = 0$, daher nach (8), (7) und (6):

$$\lim_{l \to \infty} |\mathfrak{z}^{l+k} - \mathfrak{z}^l| = \lim_{l \to \infty} (\mathfrak{s}^{l+k} - \mathfrak{s}^l) = 0,\ k = 1, 2 \ldots \quad \ldots \quad (10).$$

Hiernach konvergiert die Folge $\mathfrak{z}^l$, $l = 0, 1 \ldots$ gegen den Punkt $\mathfrak{z}^* = \lim\limits_{k \to \infty} \mathfrak{z}^k$ aus $\mathfrak{Z}$. Die Gleichungen $\mathfrak{z}^{k+1} = \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^k)$ übergehen wegen der Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}^k)$ für $k \to \infty$ in $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{F}(\mathfrak{z}^*)$.

Bezeichnet $\bar{\mathfrak{z}}^*$ den Grenzpunkt der Folge $\bar{\mathfrak{z}}^k$, die mit einem von $\mathfrak{z}^0$ verschiedenen Punkte $\bar{\mathfrak{z}}^0$ beginnt, so ist $\bar{\mathfrak{z}}^* = \mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{z}}^*)$, $|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}^*| \leq \mathfrak{Q}\,|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}^*|$ und nach k-maliger Ausführung mit Rücksicht auf (8) $|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}^*| \leq \mathfrak{Q}^k\,|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}|$; schließlich wegen $|\varkappa_\mu| < 1$ für $k \to \infty$:

$$|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}^*| \leq \lim \mathfrak{Q}^k\,|\bar{\mathfrak{z}}^* - \mathfrak{z}^*| = 0.$$

Da hier nur das Gleichheitszeichen gelten kann, muß $\bar{\mathfrak{z}}^* = \mathfrak{z}^*$, der Grenzpunkt vom Anfangspunkte unabhängig sein.

Fehlerabschätzung. Setzt man auf Grund von (10) $\lim\limits_{l \to \infty} \mathfrak{s}^l = \mathfrak{s}^*$, so folgt aus (7):

$$\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^l \leq \mathfrak{Q}\,(\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^{l-1}) \quad \ldots \quad (11)$$

und nach Addition von $\mathfrak{s}^l - \mathfrak{s}^{l-1} = |\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}|$:

$$(\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^{l-1}) - \mathfrak{Q}\,(\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^{l-1}) \leq |\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| \quad \ldots \quad (12).$$

Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiger Vektor, so konvergiert die Iteration $\mathfrak{x}^{k+1} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{x}^k + \mathfrak{q}$, da die charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{Q}$ dem Modul nach kleiner sind als 1, nach bekannten Sätzen[10]) über lineare Gleichungen gegen den Vektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{q} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{q} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{q} + \ldots = \mathfrak{U}\,\mathfrak{q}, \quad \ldots \quad (13),$$

der die Lösung des Systems $\mathfrak{x} - \mathfrak{Q}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{q}$ darstellt. Bezeichnet $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix, so ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{E} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q} + \ldots$ die Inverse von $\mathfrak{E} - \mathfrak{Q}$ und hat kein negatives Element, wenn $\mathfrak{Q}$ kein solches hat, wie dies hier vorausgesetzt ist. Setzt man $\mathfrak{U}$ vor beide Seiten von (12), so wird mit Rücksicht auf (8)

$$\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^{l-1} \leq \mathfrak{U}\,|\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| \text{ und } \mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^l \leq \mathfrak{U}\,|\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| - |\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| \quad \ldots \quad (14).$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ in (6) gibt $|\mathfrak{z}^* - \mathfrak{z}^l| \leq \mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}^l$; daher ist nach (14)

$$|\mathfrak{z}^* - \mathfrak{z}^{l-1}| \leq \mathfrak{U}\,|\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| \text{ und } |\mathfrak{z}^* - \mathfrak{z}^l| \leq \mathfrak{U}\,|\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}| - |\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}|,\ (l = 1, 2 \ldots) \quad (15).$$

Bezeichnet $\mathfrak{z}$ einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{Z}$, etwa eine Näherung für $\mathfrak{z}^*$, so ergeben sich Abschätzungen für die Komponenten von $|\mathfrak{z}^* - \mathfrak{z}|$, wenn man in (15) $\mathfrak{z}^{l-1} = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}^l = \mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ setzt.

Aus $\mathfrak{x} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{q}$ folgt nach **4** (21), (22) $\varrho\{\mathfrak{x}\} \leq \varrho\{\mathfrak{Q}\}\,\varrho\{\mathfrak{x}\} + \varrho\{\mathfrak{q}\}$ und nach **4** (16):

$$|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{U}\,\mathfrak{q}| \leq \varrho\{\mathfrak{x}\} \leq \frac{\varrho\{\mathfrak{q}\}}{1 - \varrho\{\mathfrak{Q}\}} \quad \ldots \quad (16).$$

[10]) Siehe den Aufsatz von R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer in Heft 1, 1929, dieser Zeitschrift.

Hiernach können die Komponenten des in (15) auftretenden Vektors $\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{z}^l - \mathfrak{z}^{l-1}\,|$ leicht abgeschätzt werden, wenn eine der im Abschnitt **4** angeführten Maßzahlen $\varrho\,\{\mathfrak{Q}\}$ hinreichend klein ist.

2. Um die Konvergenz der Polynomfolgen $\eta_n{}^k$, $k = 1, 2 \ldots$ zu beweisen, nehmen wir zunächst an, $\eta\,(x_{n-1})$, $1 \leqq n \leqq N$, sei eine beliebige der Ungleichung

$$|\,\eta\,(x_{n-1}) - y\,(x_0)\,| \leqq M\,a\,(x_{n-1} - x_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

genügende reelle Zahl, und zeigen, daß dann die Iteration

$$\eta^{k+1}_{n\nu} = \eta\,(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r}{}' f^k_{n\varrho}\,(p-1, \nu)^r_\varrho\,, \quad \nu = 0, 1 \ldots r, \quad k = 1, 2 \ldots \quad \ldots \quad (18\text{a}),$$

oder, kürzer geschrieben, die Iteration

$$\mathfrak{y}^{k+1}_n = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{y}^k_n)\,, \quad k = 1, 2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18\text{b})$$

konvergiert.

Wir ordnen je $r+1$-Punkten $x_{n\varrho}$, $\eta_{n\varrho}$, die in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, den Punkt $\mathfrak{y}_n$ mit den Koordinaten $\eta_{n\varrho}$ eines gewissen, abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{Y}$ eines R_{r+1} zu und umgekehrt. Ist $\mathfrak{y}^0_n$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{Y}$, $x_{n\varrho}$, $\eta^0_{n\varrho}$ das zugehörige Punkte-$r+1$-tupel aus $\mathfrak{B}$, so gilt nach **1** (3) $|\,f^0_{n\varrho}\,| \leqq M$, ferner zufolge (18a) und (1):

$$|\,\eta^1_{n\nu} - \eta\,(x_{n-1})\,| \leqq h\,M \sum_{\varrho=0}^{r}{}' \,|\,(p-1, \nu)^r_\varrho\,| \leqq h\,M\,a\,(\nu - p + 1) + h\,M\,b\,,$$

endlich unter Benutzung von (17):

$$|\,\eta^1_{n\nu} - y\,(x_{n-1})\,| \leqq M\,a\,(x_{n\nu} - x_0) + h\,M\,b, \quad \nu = 0, 1, \ldots, r.$$

Hiernach ist das Punkte-$r+1$-tupel $x_{n\nu}$ $\eta^1_{n\nu}$ im Bereiche (2), mit diesem in $\mathfrak{B}$, der Punkt $\mathfrak{y}_n{}^1 = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{y}_n{}^0)$ in $\mathfrak{Y}$ enthalten, die erste Konvergenzbedingung zum Satze 1 erfüllt. Eine Induktion zeigt, daß die Punktfolgen $\mathfrak{y}^k_n$ und $x_{n\nu}$, $\eta^k_{n\nu}$, $k = 1, 2 \ldots$ in $\mathfrak{Y}$, bzw. in $\mathfrak{B}$, letztere auch im Bereiche (2) enthalten sind.

Sind $\mathfrak{y}^0_n$, $\bar{\mathfrak{y}}^0_n$ zwei beliebige Punkte aus $\mathfrak{Y}$, $x_{n\nu}$, $\eta^0_{n\nu}$ und $x_{n\nu}$, $\bar{\eta}^0_{n\nu}$ die zugehörigen $r+1$-Punktpaare aus $\mathfrak{B}$, so gelten zufolge **1** (2) die Ungleichungen:

$$|\,h \sum_{\varrho=0}^{r}{}' [f(x_{n\varrho}, \bar{\eta}^0_{n\varrho}) - f(x_{n\varrho}\,\eta^0_{n\varrho})]\,(p-1, \nu)^r_\varrho\,| \leqq B\,h \sum_{\varrho=0}^{r}{}' \,|\,(p-1, \nu)^r_\varrho\,|\,|\,\bar{\eta}^0_{n\varrho} - \eta^0_{n\varrho}\,|\,, \; \nu = 0, 1, \ldots r,$$

oder, kürzer geschrieben, die Ungleichungen

$$|\,\mathfrak{F}\,(\bar{\mathfrak{y}}_n{}^0) - \mathfrak{F}\,(\mathfrak{y}_n{}^0)\,| \leqq \mathfrak{Q}\,|\,\bar{\mathfrak{y}}_n{}^0 - \mathfrak{y}_n{}^0\,|\,, \quad \mathfrak{Q} = B\,h\,\mathfrak{A}\,.$$

Die charakteristischen Zahlen $B\,h\,\varkappa_i$ der Matrix $\mathfrak{Q}$ haben zufolge (3) Moduln, die sämtlich < 1 sind, wonach die Iteration (18) auch der 2. und der 3. Konvergenzbedingung zu 1. genügt. Die Folge $\mathfrak{y}_n{}^{k+1} = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{y}_n{}^k)$, $k = 0, 1 \ldots$ konvergiert daher gegen einen von $\mathfrak{y}_n{}^0$ unabhängigen Grenzpunkt $\mathfrak{y}_n{}^*$ aus $\mathfrak{Y}$, dessen Koordinaten die Gleichung $\mathfrak{y}_n{}^* = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{y}_n{}^*)$ erfüllen. Die Folgen (18) konvergieren gegen $r+1$ von den Zahlen $\eta^0_{n\nu}$ unabhängige Grenzen

$$\eta^*_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} \eta^k_{n\nu}\,, \quad \eta^*_{n\nu} = \eta\,(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r}{}' f^*_{n\varrho}\,(p-1, \nu)^r_\varrho\,, \quad \nu = 0, 1 \ldots r \quad \ldots \quad (19),$$

die Punktfolgen $x_{n\nu}$, $\eta^k_{n\nu}$ gegen $r+1$-Grenzpunkte $x_{n\nu}$, $\eta^*_{n\nu}$ in $\mathfrak{B}$.

Bezeichnet man mit $\eta_n{}^* = \eta_n{}^*(x)$ das Polynom

$$\eta^*_n = \lim_{k\to\infty} \eta^k_n\,, \quad \eta^k_n = \eta^k_n\,(x) = \eta\,(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r}{}' f(x_{n\varrho}\,\eta^{k-1}_{0\varrho}) \left(p-1\,,\, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho \qquad (20),$$

so wird

$$\eta^*_n = \eta\,(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=1}^{r}{}' f(x_{n\varrho},\, \eta^*_{n\varrho}) \left(p-1\,,\, \frac{x - x_{n\varrho}}{h}\right)^r_\varrho\,, \quad \eta^*_n\,(x_{n\nu}) = \eta^*_{n\nu} \quad \ldots \quad (21)$$

und

$$\left.\frac{d\,\eta_n{}^*}{d\,x}\right|_{x_{n\nu}} = f\,(x_{n\nu},\, \eta_n{}^*\,[x_{n\nu}]), \quad \nu = 0, 1 \ldots r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Hiernach gilt $\eta_n{}^k \to \eta_n{}^*$, $(k \to \infty)$, wenn (17) erfüllt ist.

Es sei nun $\eta(x_{n-1})$ nach Abschnitt **2** ermittelt und angenommen, daß die Ungleichung (17) besteht. Da die Punkte $x_{n\nu}$, $\eta^k_{n\nu}$, $k=0,1\ldots$ in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, ist $|f^k_{n\varrho}| \leqq M$. Aus (18) mit $\nu = p$ und aus (17) ergibt sich $|\eta^k_{np} - \eta(x_{n-1})| \leqq Mh \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1,p)^r_\varrho| = Mha$ und $|\eta^k_{n,p} - y(x_0)| \leqq Ma(x_n - x_0)$ für $k = 1, 2 \ldots$, endlich im besonderen für $k = k_n$:

$$|\eta(x_n) - y(x_0)| \leqq Ma(x_n - x_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Da (17) für $n = 1$ jedenfalls zutrifft, folgt durch Induktion aus (17) und (23), daß (23) von den nach **2** ermittelten Näherungen $\eta(x_n)$, $n = 1, 2 \ldots N$ erfüllt wird.

Sind demnach $\eta(x_{n-1})$, $n = 1, 2 \ldots N$ nach **2** ermittelte Näherungen für $y(x_{n-1})$, so konvergieren die Polynomfolgen $\eta_n{}^k$, $k = 1, 2 \ldots$ gegen Grenzpolynome $\eta_n{}^*$, die die Gl. (21) und (22) befriedigen. Die Punktfolgen $x_{n\nu}$, $\eta^k_{n\nu}$, $k = 1, 2 \ldots$ und ihre Grenzen sind im Bereiche (2) und mit diesem in $\mathfrak{B}$ enthalten.

3. Ist $\eta(x_{n-1})$ eine Veränderliche im Intervall $|\eta(x_{n-1}) - y(x_0)| \leqq Ma(x_{n-1} - x_0)$, so ist das Grenzpolynom η^*_n, $\eta^*_n(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1})$ eine stetige Funktion von $\eta(x_{n-1})$ mit beschränkten Differenzenquotienten.

Beweis. Es seien $\eta(x_{n-1})$, $\bar{\eta}(x_{n-1})$ zwei Zahlen jenes Intervalles und η^*_n, $\bar{\eta}^*_n$ die zugehörigen Grenzpolynome. Aus den entsprechenden Gleichungen (21) folgt unter Beachtung von $\sum_{\varrho=0}^{r} (p-1, t)^r_\varrho = t - p + 1$:

$$(\bar{\eta}^*_n - \eta^*_n) - (\bar{\eta}[x_{n-1}] - \eta[x_{n-1}]) = h \sum_{\varrho=0}^{r} (\bar{f}^*_{n\varrho} - f^*_{n\varrho}) \left(p-1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho$$

$$= h \sum_{\varrho=0}^{r} \{(\bar{f}^*_{n\varrho} - f^*_{n\varrho}) - (\bar{f}^*_{n,p-1} - f^*_{n,p-1})\} \left(p-1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho + (\bar{f}^*_{n,p-1} - f^*_{n,p-1})(x - x_{n-1}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$q_n = q_n(x) = (\bar{\eta}^*_n - \eta^*_n) : (\bar{\eta}[x_{n-1}] - \eta[x_{n-1}]); \; q_{n\nu} = q_n(x_{n\nu}), \; \nu = 0, 1 \ldots r \quad \ldots \quad (24),$$

so wird

$$|q_n - 1| \leqq hB \sum_{\varrho=0}^{r} \left| \left(p-1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho \right| |q_{n\varrho} - 1| + B|x - x_{n-1}| \quad \ldots \ldots \quad (25),$$

$$|q_{n\nu} - 1| \leqq hB \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, \nu)^r_\varrho| |q_{n\varrho} - 1| + Bh|\nu - p + 1| \quad \ldots \ldots \quad (26\text{a}).$$

Bezeichnet $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{n}$ die Vektoren mit den Komponenten $g_\nu = |q_{n\nu} - 1|$ und $n_\nu = |\nu - p + 1|$, so erhält (26a) die Form

$$\mathfrak{g} - \mathfrak{Q}\mathfrak{g} \leqq Bh\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{Q} = Bh\mathfrak{A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26\text{b}).$$

Ist $\mathfrak{j} = \mathfrak{U}\mathfrak{n}$ die Lösung des Systems $\mathfrak{j} - \mathfrak{Q}\mathfrak{j} = \mathfrak{n}$, so gilt, da die Matrix $\mathfrak{U}$ kein negatives Element enthält, wegen (13):

$$\mathfrak{g} \leqq Bh\mathfrak{j} \quad \text{oder} \quad |q_{n\nu} - 1| \leqq Bhj_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27),$$

wobei j_ν, $\nu = 0, 1 \ldots r$ die Lösung des Systems

$$j_\nu = hB \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, \nu)^r_\varrho| \cdot j_\varrho + |\nu - p + 1| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

darstellt. Setzt man die Oberzahlen (27) für $|q_{n\varrho} - 1|$ in (25) ein, so ergibt sich für jedes endliche x eine von $\eta(x_{n-1})$, $\bar{\eta}(x_{n-1})$ unabhängige Oberzahl für die Differenzenquotienten (24), womit die Behauptung bewiesen ist.

Wegen der Zeichenbeständigkeit von $\left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho$ im Intervall $x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$ ist daselbst $\left|\left(p-1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)^r_\varrho\right| \leqq |(p-1, p)^r_\varrho|$ und zufolge (25) und (27):

$$|q_n - 1| \leqq hB \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, p)^r_\varrho| |q_{n\varrho} - 1| + hB \leqq hB \left\{hB \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, p)^r_\varrho| j_\varrho + 1\right\},$$

endlich mit Rücksicht auf die p-te Gl. (28): $|q_n - 1| \leqq hBj_p$.

Hiernach ist im Intervall $x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$:

$$|\bar{\eta}^*(x) - \eta^*(x)| : |\bar{\eta}(x_{n-1}) - \eta(x_{n-1})| \leqq q, \quad q = 1 + h B j_p \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

4. Es gibt eine Funktion $H = H(x)$, die durch die folgenden Gleichungen definiert wird:

$$H(x_0) = y(x_0), \quad H(x) = H_n(x) \text{ für } x_{n-1} < x \leqq x_n, \quad n = 1, 2 \ldots N.$$

Hierbei sind $H_n = H_n(x)$ die Grenzpolynome, die den Gleichungen

$$H_n = H(x_{n-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f(x_{n\varrho}\, H_n[x_{n\varrho}]) \left(p - 1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)_{\varrho}^{r}$$

genügen. Außerdem ist

$$|H(x_n) - y'(x_0)| \leqq M a (x_n - x_0), \quad n = 1, 2 \ldots N.$$

Beweis. Angenommen, die Behauptungen seien richtig für $n = 1, 2 \ldots (m-1)$, wobei $1 \leqq m \leqq N$ ist. In diesem Falle ist $|H(x_{m-1}) - y(x_0)| \leqq M a (x_{m-1} - x_0)$. Daher gibt es ein Grenzpolynom $H_m = H_m(x)$, das der Gleichung

$$H_m = H(x_{m-1}) + h \sum_{\varrho=0}^{r} f(x_{m\varrho},\ H_m[x_{m\varrho}]) \left(p - 1, \frac{x - x_{n\varrho}}{h}\right)_{\varrho}^{r} \quad \ldots \quad (30)$$

genügt und so, daß die Punkte $x_{m\varrho}$, $H_m[x_{m\varrho}]$ $\varrho = 0, 1 \ldots r$ in $\mathfrak{B}$ enthalten sind. Dann ist jedoch

$$|H_m(x_m) - H(x_{m-1})| \leqq h M \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, p)_{\varrho}^{r}| = h M a$$

und nach Addition zur vorletzten Ungleichung

$$|H(x_m) - y(x_0)| = |H_m(x_m) - y(x_0)| \leqq M a (x_m - x_0) \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Nach (30) und (31) gilt die Behauptung für $n = 1, 2 \ldots m$, wenn sie für $n = 1, 2 \ldots m-1$ zutrifft. Da sie für $m = 1$ offenbar gültig ist, folgt ihre Richtigkeit für $n = 1, 2 \ldots N$ durch Induktion.

5. Ist k' jene der Zahlen $k_1, k_2 \ldots k_N$, die nicht größer ist als jede der übrigen, und bezeichnet $\eta = \eta(x; k')$ eine Funktion $\eta(x)$, wenn hervorgehoben werden soll, daß $k_n \geqq k'$, $n = 1, 2 \ldots N$ ist, so gilt: $\lim\limits_{k' \to \infty} \eta(x; k') = H(x)$.

Beweis. Sind η_n^* und H_n die Grenzpolynome, die die Bedingungen $\eta_n^*(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1})$, $H_n(x_{n-1}) = H(x_{n-1})$ erfüllen, schreibt man zur Abkürzung $H(x_{n-1}) - \eta(x_{n-1}) = s_{n-1}$ und macht man von der Ungleichung (29) Gebrauch, so ist in jedem Intervall $x_{n-1} < x \leqq x_n$ $|H - \eta| \leqq |H_n - \eta_n^*| + |\eta_n^* - \eta_n^{k_n}| \leqq |s_{n-1}|\, q + |\eta_n^* - \eta_n^{k_n}|$ und im besonderen für $x = x_n$:

$$|s_n| \leqq |s_{n-1}|\, q + \left|\eta_{np}^* - \eta_{np}^{k_n}\right|.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung und unter Rücksichtnahme auf $s_0 = 0$ ergibt sich

$$|H(x) - \eta(x; k')| \leqq \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left|\eta_{\sigma p}^* - \eta_{\sigma p}^{k_\sigma}\right| q^{n-\sigma} + \left|\eta_n^* - \eta_n^{k_n}\right| \text{ für } x_{n-1} < x \leqq x_n \quad . \quad . \quad (32).$$

Wegen $k_n \geqq k'$ und wegen der Konvergenz $\eta_n^k \to \eta_n^*$ ist für $x_{n-1} < x \leqq x_n$, $n = 1, 2 \ldots N$, also für $x_0 \leqq x \leqq x_N$:

$$\lim_{k' \to \infty} |H(x) - \eta(x; k')| = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

6. Es bezeichne $< x_0, x_0 + I >$ ein konstantes Intervall, $\eta = \eta(x) = \eta(x, h)$ verschiedene Näherungen für $y(x)$, die mit verschiedenen Spannen h, jedoch mit unveränderten Werten von r und p in den Intervallen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + N h, \ I \leqq N h < I + h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

gewonnen werden, und h' N', M', drei Konstante.

Ist $I < N' h'$, enthält $\mathfrak{B}$ den Bereich

$$x_0 - (p-1) h' \leqq x \leqq x_0 + (N' + r - p) h', \ |y - y(x_0)| \leqq M a (x - x_0) + M b h' \quad (34)$$

und die Punkte $x_{n\nu}^0$, $\eta_{n\nu}$, $n = 0, 1 \ldots N$, $\nu = 0, 1 \ldots r$ der x, y-Ebene und ist außerdem wenigstens eine der Bedingungen

$$|\eta_{n\nu}^0 - \eta(x_{n-1})| \leqq M' |x_{n\nu} - x_{n-1}|, \ k_n \geqq 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35\text{a, b})$$

oder $$k_n \geqq 2 \quad \ldots \quad (36)$$

erfüllt, so gilt

$$\lim_{h \to 0} \eta(x, h) = y(x) \text{ für } x_0 \leqq x \leqq x_0 + I.$$

Zunächst beweisen wir, daß es eine Spanne h'' gibt, so daß die Punkte $x_{n\nu}, \eta_{n\nu}^k$ und die Punkte x, η für jedes $h \leqq h''$ und für $k = 0, 1 \ldots$, bzw. für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + Nh$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ enthalten sind.

Erfüllt h'' die ersten zwei der Ungleichungen

$$h'' \leqq h', \qquad h'' \leqq N'h' - I, \qquad (a-1)\,h'' \leqq b\,h' \quad \ldots \quad (37),$$

so ist

$$(N' + r - p)\,h' > I + h'' + (r-p)\,h' \geqq I + (r - p + 1)\,h'' \geqq I + (r - p + 1)\,h > (N + r - p)\,h,$$

daher der Bereich

$$x_0 - (p-1)\,h \leqq x \leqq x_0 + (N + r - p)\,h, \quad |y - y(x_0)| \leqq M\,a\,(x - x_0) + M\,b\,h$$

ein Teilbereich von (34) und mit diesem in $\mathfrak{B}$ enthalten. Dann sind die Punktfolgen $x_{n\nu}$, $\eta_{n\nu}^k$, $k = 0, 1 \ldots$ nach der Voraussetzung und nach Ziffer 2 ebenfalls in $\mathfrak{B}$ enthalten und es ist $|f_{n\nu}^k| \leqq M$.

Für $x_{n-1} < x \leqq x_n$, $n = 1, 2 \ldots N$, ist

$$\eta(x) - \eta(x_{n-1}) = \eta_n^{k_n}(x) - \eta(x_{n-1}) = h \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n-1} \left(p-1, \frac{x - x_{n0}}{h}\right)_\varrho^r.$$

Setzt man rechts $x = x_{n0} + h\,t$, so gilt mit Rücksicht auf $|f_{n\nu}^k| \leqq M$:

$$|\eta(x) - \eta(x_{n-1})| \leqq h\,M \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, t)_\varrho^r|, \quad p - 1 < t \leqq p \quad \ldots \quad (38).$$

Da die Polynome $(t)_\varrho^r$ im Intervall $p - 1 \leqq t \leqq p$ zeichenbeständig sind, gelten daselbst die Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, t)_\varrho^r| = \sum_{\varrho=0}^{r} \left|\int_{p-1}^{t} (t)_\varrho^r\,dt\right| = \int_{p-1}^{t} \sum_{\varrho=0}^{r} |(t)_\varrho^r|\,dt = \int_{p-1}^{p} - \int_{t}^{p} \sum_{\varrho=0}^{r} |(t)_\varrho^r|\,dt.$$

Nun ist $\displaystyle\int_{p-1}^{p} \sum_{\varrho=0}^{r} |(t)_\varrho^r|\,dt = \sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, p)_\varrho^r| = a$, ferner wegen $\displaystyle\int_{t}^{p} \sum_{\varrho=0}^{r} (t)_\varrho^r\,dt = p - t$

jedenfalls $\displaystyle\int_{t}^{p} \sum_{\varrho=0}^{r} |(t)_\varrho^r|\,dt \geqq p - t$; daher $\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{r} |(p-1, t)_\varrho^r| \leqq a - p + t \leqq a\,(t - p + 1) + (a - 1)$

für $p - 1 \leqq t \leqq p$ und auf Grund von (38):

$$|\eta(x) - \eta(x_{n-1})| \leqq M\,a\,(x - x_{n-1}) + M\,h\,(a-1) \text{ für } x_{n-1} < x \leqq x_n \quad \ldots \quad (39).$$

Hierzu addieren wir die nach (19) gültige Ungleichung: $|\eta(x_{n-1}) - y(x_0)| \leqq M\,a\,(x_{n-1} - x_0)$ und erhalten $|\eta(x) - y(x_0)| \leqq M\,a\,(x - x_0) + M\,h\,(a-1)$ für $x_0 < x \leqq x_0 + Nh$.

Genügt h'' der dritten Ungleichung (37), so ist $h\,(a-1) \leqq b\,h'$. Die Punkte x, η,

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + Nh,$$

sind im Bereiche (34) und mit diesem in $\mathfrak{B}$ enthalten.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Näherungen $\eta(x; h)$, bei denen $h \leqq h''$ ist, wobei h'' den Ungleichungen (37) genügt.

Unter dieser Voraussetzung sind die Punkte $x_{n\nu}, \eta_{n\nu}^k$, und die Punkte x, η in $\mathfrak{B}$ enthalten, $f(x_{n\nu}, \eta_n^k[x_{n\nu}])$ und $f(x, \eta)$ stetige Funktionen ihrer Argumente, die den Ungleichungen $|f_{n\nu}^k| \leqq M$, $|f(x, \eta)| \leqq M$ genügen.

Der Widerspruch $w = w[x, \eta(x; h)]$, der sich ergibt, wenn man η anstatt y in $y' = f(x, y)$ einsetzt, wird nach **5** (1) durch die Funktion

$$w = f(x, \eta_n^{k_n}) - \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k_n - 1} \left(\frac{x - x_{n0}}{h}\right)_\varrho^r, \quad x_{n-1} < x \leq x_n, \quad n = 1, 2 \ldots N$$

dargestellt. Hierbei sind n und N die ganzen Zahlen $\frac{x - x_0}{h} \leq n < \frac{x - x_0}{h} + 1$, $\frac{I}{h} \leq N < \frac{I}{h} + 1$. Setzt man $x = x_{n0} + h t$, so ist $t = \frac{x - x_{n-p}}{h} = \frac{x - x_0}{h} - (n - p)$ eine Funktion von x und h, die der Ungleichung $p - 1 < t \leq p$ genügt.

Auf Grund der Définition von η und unter Beachtung der Gleichung $\sum_{\varrho=0}^{r} (t)_\varrho^r = 1$ schreiben wir w in der Form

$$w = S + T, \; S = f(x, \eta) - f(x_{n-1}, \eta[x_{n-1}]), \quad T = \sum_{\varrho=0}^{r} \{ f(x_{n\varrho}, \overset{k_n - 1}{\eta[x_{n\varrho}]}) - f(x_{n-1}, \eta[x_{n-1}]) \} (t)_\varrho^r.$$

Wegen $|x - x_{n-1}| \leq h$ und (39) ist

$$\lim_{h \to 0} (x - x_{n-1}) = 0 \text{ und } \lim_{h \to 0} [\eta(x) - \eta(x_{n-1})] = 0;$$

infolge der Stetigkeit von $f(x, y)$ daher auch $\lim_{h \to 0} S = 0$.

Aus den Beziehungen

$$|\eta_{n\nu}^k - \eta(x_{n-1})| = h \left| \sum_{\varrho=0}^{r} f_{n\varrho}^{k-1} (p - 1, \nu)_\varrho^r \right| \leq h M \sum_{\varrho=0}^{r} |(p - 1, \nu)_\varrho^r|, \quad k = 1, 2 \ldots \quad \ldots \quad (40)$$

ergibt sich $\lim_{h \to 0} |\eta_{n\nu}^{k_n - 1} - \eta(x_{n-1})| = 0$, wenn $k_n \geq 2$ ist. Gilt die Ungleichung (35a), so ist wegen

$$|x_{n\nu} - x_{n-1}| = h\,|\nu - p + 1| \qquad |\eta_{n\nu}^0 - \eta(x_{n-1})| \leq h M' |\nu - p + 1| \quad \ldots \quad (41),$$

daher $\lim_{h \to 0} |\eta_{n\nu}^{k_n - 1} - \eta(x_{n-1})| = 0$, auch wenn nur $k_n \geq 1$ vorausgesetzt wird.

Da auch $\lim_{h \to 0} |x_{n\nu} - x_{n-1}| = 0$ ist und $|(t)_\varrho^r|$ unter einer von h unabhängigen Schranke liegt, ist infolge der Stetigkeit von $f(x, y)$: $\lim_{h \to 0} T = 0$.

Es ist also

$$\lim_{h \to 0} w[x, \eta(x, h)] = 0 \text{ für } x_0 < x \leq x_0 + N h \quad \ldots \quad (42).$$

Da $I \leq N h$ und $w[x_0, \eta(x_0)] = 0$ ist, gilt diese Gleichung auch für $x_0 \leq x \leq x_0 + I$.

Da η eine stetige, stückweise glatte Funktion von x und $\eta(x_0) = y(x_0)$ ist, gilt nach **4** (13):

$$|y(x) - \eta(x; h)| \leq \frac{e^{B(x - x_0)} - 1}{B} \operatorname*{fin\,sup}_{x_0 \leq u < x} |w[u, \eta(u; h)]|$$

und zufolge (42):

$$\lim_{h \to 0} |y(x) - \eta(x; h)| = 0 \quad \text{für} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + I.$$

Hiermit sind die unter 1. vorgebrachten Behauptungen bewiesen.

Besitzt $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkte $r + 1$te Ableitungen nach x, y, und nimmt man die Näherungen $\eta_{n\nu}^0$ nach (35a), die Zahlen $k_n \geq r + 1$ an, so ist gleichmäßig in $x_0 \leq x \leq x_0 + I$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y - \eta}{h^r} = 0 \quad \ldots \quad (43).$$

Ist unter diesen Voraussetzungen $|\eta_{np}^{r+2} - \eta_{np}^{r+1}|$ noch nicht hinreichend klein, so empfiehlt es sich, die Rechnung mit verkleinertem h, oder — bei entsprechender Differentiierbarkeit an $f(x, y)$ — mit vergrößertem r zu wiederholen.

Zum Beweise von (43) kann man die partikulären Integrale $\bar{y}_n = \bar{y}_n(x)$ mit den Anfangsbedingungen $\bar{y}_n(x_{n-1}) = \eta(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ verwenden. Schätzt man $|\bar{y} - \eta|$, $|y - \bar{y}|$ und die dabei in $|\bar{y}_n - \eta|$ auftretenden Reste der Approximationen von $f(x, \bar{y}_n)$ durch die hier verwendeten Polynome $r$ten Grades, so erhält man eine von h und x unabhängige Schranke für $\left|\frac{y - \eta}{h^{r+1}}\right|$ und hieraus die Beziehung (43). 272

7. Zahlentafeln.

	$r=0$			$r=1$						$r=2$								
	$(0,\nu)^0_0$	$2\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^0_0$	$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^0_0$	$2\,(0,\nu)^1_\varrho$		$8\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^1_\varrho$		$2\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^1_\varrho$		$12\,(0,\nu)^2_\varrho$			$24\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^2_\varrho$			$8\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2_\varrho$		
$\nu \diagdown \varrho$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
— 1	— 1			— 3	1					— 23	16	— 5						
0	0	— 1	1	0	0	— 5	1	3	— 1	0	0	0	— 17	7	— 2	15	— 10	3
1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	5	8	— 1	8	5	— 1	3	6	— 1
2				0	4	3	9	— 1	3	4	16	4	9	27	0	— 1	6	3
3										9	0	27	10	25	25	3	— 10	15

	$r=3$											
	$24\,(0,\nu)^3_\varrho$				$384\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^3_\varrho$				$16\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^3_\varrho$			
$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
— 1	— 55	59	— 37	9								
0	0	0	0	0	— 297	187	— 107	25	35	— 35	21	— 5
1	9	19	— 5	1	119	107	— 43	9	5	15	— 5	1
2	8	32	8	0	135	459	— 27	9	— 1	9	9	— 1
3	9	27	27	9	135	475	325	25	1	— 5	15	5
4	0	64	— 32	64	119	539	245	441	— 5	21	— 35	35

$r = 4$

$720\,(0,\nu)^4_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4
— 1	— 1901	2774	— 2616	1274	— 251
0	0	0	0	0	0
1	251	646	— 264	106	— 19
2	232	992	192	32	— 8
3	243	918	648	378	— 27
4	224	1024	384	1024	224
5	475	— 250	3000	— 1750	2125

$5760\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^4_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4
0	— 4769	4061	— 3489	1631	— 314
1	1694	1969	— 1191	499	— 91
2	1917	7317	— 1053	567	— 108
3	1900	7625	4125	875	— 125
4	1883	7693	4263	6223	98
5	2106	6561	6561	4131	6561

$128\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^4_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4
0	315	— 420	378	— 180	35
1	35	140	— 70	28	— 5
2	— 5	60	90	— 20	3
3	3	— 20	90	60	— 5
4	— 5	28	— 70	140	35
5	35	— 180	378	— 420	315

$r = 5$

$1440\,(0,\nu)^5_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4	5
— 1	— 4277	7923	— 9982	7298	— 2877	475
0	0	0	0	0	0	0
1	475	1427	— 798	482	— 173	27
2	448	2064	224	224	— 96	16
3	459	1971	1026	1026	— 189	27
4	448	2048	768	2048	448	0
5	475	1875	1250	1250	1875	475
6	0	4752	— 6048	11232	— 6048	4752

$46080\left(0,\nu-\frac{1}{2}\right)^5_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4	5
0	— 40339	43423	— 49782	34918	— 13447	2187
1	13013	18447	— 14918	9382	— 3423	539
2	14661	61911	— 15174	11286	— 4239	675
3	14525	64375	26250	13750	— 4375	675
4	14525	64239	28714	55174	— 1911	539
5	14661	63423	30618	54918	41553	2187
6	13013	73447	5082	89782	16577	55539

$256\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^5_\varrho$

$\nu \diagdown \varrho$	0	1	2	3	4	5
0	693	— 1155	1386	— 990	385	— 63
1	63	315	— 210	126	— 45	7
2	— 7	105	210	— 70	21	— 3
3	3	— 25	150	150	— 25	3
4	— 3	21	— 70	210	105	— 7
5	7	— 45	126	— 210	315	63
6	63	385	— 990	1386	— 1155	693

$r = 3$						
$N(1, \nu)_{\varrho}^{3}$						
$\nu \backslash \varrho$	0	1	2	3	4	N
0	−9	−19	5	−1	·	24
1	0	0	0	0	·	·
2	−1	13	13	−1	·	24
3	0	1	4	1	·	3
4	−3	15	−9	21	·	8
1,5	−9	155	53	−7	·	384
$N(2, 4)_{\varrho}^{3}$						
4	−1	4	−5	8	·	3
$N(\nu)_{\varrho}^{3}$						
1,5	−1	9	9	−1	·	16

$r = 4$						
$N(1, \nu)_{\varrho}^{4}$						
$\nu \backslash \varrho$	0	1	2	3	4	N
0	−251	−646	264	−106	19	720
1	0	0	0	0	0	·
2	−19	346	456	−74	11	720
3	−1	34	114	34	−1	90
4	−3	42	72	102	27	80
5	14	−66	204	−116	134	45
1,5	−91	2149	1059	−281	44	5760
2,5	−12	273	693	3	3	640
$N(3, 5)_{\varrho}^{4}$						
5	29	−146	294	−266	269	90
$N(\nu)_{\varrho}^{4}$						
1,5	−5	60	90	−20	3	128
2,5	3	−20	90	60	−5	128

$r = 5$							
$N(2, \nu)_{\varrho}^{5}$							
$\nu \backslash \varrho$	0	1	2	3	4	5	N
0	−28	−129	−14	−14	6	−1	90
1	27	−637	−1022	258	−77	11	1440
2	0	0	0	0	0	0	·
3	11	−93	802	802	−93	11	1440
4	0	−1	34	114	34	−1	90
5	3	−21	114	114	219	51	160
6	−14	84	−196	344	−186	148	45
2,5	189	−1673	19082	6582	−1303	163	46080
$N(3, 6)_{\varrho}^{5}$							
6	−51	309	−786	1134	−651	525	160
$N(\nu)_{\varrho}^{5}$							
2,5	3	−25	150	150	−25	3	256

8. Beispiel.

$$y' = 0{,}1\, y^2 - x\, y\,, \qquad y\,(0) = 1\ ^{1)}$$

$$(h = 0{,}1\,,\quad r = 3\,,\quad p = 2)$$

1. Anfang der Rechnung ($n = 1$)

n	-1	0	1	2
x	$-0{,}1$	0	0,1	0,2
η_1^0	1	1	1	1
$f^0_{1\varrho}$	0,2	0,1	0	$-0{,}1$
$N_\nu\, \eta^1_{1\nu}$ [2]	23,64	24	24,12	3
η_1^1	0,985		1,005	1
ζ_1^1 [3]	0,1985		0,0005	$-0{,}1$
$f^1_{1\varrho}$	0,19522		0,00050	$-0{,}1$
$N_\nu\, \eta^2_{1\nu}$	23,644282		24,121098	3,000200
η_1^2	0,985178		1,005046	1,000067
ζ_1^2	0,198518		0,000505	$-0{,}099993$
$f^2_{1\varrho}$	0,195576		0,000508	$-0{,}100000$
$N_\nu\, \eta^3_{1\nu}$	23,644236		24,121103	3,000203
η_1^4	0,985177		[4] **1,005046**	1,000068
ζ_1^4	0,198518		0,000505	$-0{,}099993$
η_1^5	$\eta_1^5 = \eta_1^4$			

Anmerkungen.

[1] Die Aufgabe ist den Vorlesungen über numerisches Rechnen von C. Runge und H. König, § 83, entnommen.

[2] Rechenschema:

ν	⟶	$f^{k-1}_{n\,0}$	$f^{k-1}_{n\,1}$	$f^{k-1}_{n\,2}$	$f^{k-1}_{n\,3}$	N_ν
0	$N_0\left(\eta^k_{n\,0} - \eta\,[x_{n-1}]\right)$	$-0{,}9$	$-1{,}9$	0,5	$-0{,}1$	24
2	$N_2\left(\eta^k_{n\,2} - \eta\,[x_{n-1}]\right)$	$-0{,}1$	1,3	1,3	$-0{,}1$	24
3	$N_3\left(\eta^k_{n\,3} - \eta\,[x_{n-1}]\right)$	0	0,1	0,4	0,1	3
4	$N_4\left(\eta^k_{n\,4} - \eta\,[x_{n-1}]\right)$	0,3	1,5	$-0{,}9$	2,1	8

[3] $\zeta^k_n = 0{,}1\, \eta^k_n - x\,.$

[4] Die für $\eta\,(x_n)$ ermittelten Näherungswerte $\eta\,(x_n) = \eta^{k_n}_n(x_n)\,,\ n = 1,2 \ldots$ sind eingerahmt.

Das Beispiel zeigt sämtliche auszuführenden Zahlenrechnungen.

2. Fortsetzung ($n = 2, 3, \ldots$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$N_\nu \eta^0_{2\nu}$				7,880870				
η^0_2				0,985109				
ζ^0_2				— 0,201489				
$f^0_{2\varrho}$	0,1	0,000508	— 0,100000	— 0,198489				
$N_\nu \eta^1_2$	23,999987	24,121103	24,001612	2,955340	(7,684303)			
η^1_2			1,000067	0,985113				
ζ^1_2			— 0,099993	— 0,201489				
$\eta^2_2 = \eta^0_3$			**1,000067**	0,985113	0,960538			
ζ^0_3					— 0,303946			
$f^0_{3\varrho}$		0,000508	— 0,100000	— 0,198489	— 0,291952			
$N_\nu \eta^1_{3\nu}$		24,121106	24,001612	23,642721	2,881611	(7,415926)		
η^1_3				0,985113	0,960537			
ζ^1_3					— 0,303946			
$\eta^2_3 = \eta^0_4$				**0,985113**	— 0,960537	0,926991		
ζ^0_4						— 0,407301		
$f^0_{4\varrho}$			— 0,100000	— 0,198489	— 0,291952	— 0,377564		
$N_\nu \eta^1_{4\nu}$			24,001631	23,642721	23,052905	2,780953	(7,083042)	
η^1_4			1,000068		0,960538	0,926984		
ζ^1_4			— 0,099993		— 0,303946	— 0,407302		
$f^1_{4\varrho}$						— 0,377562		
$\eta^2_4 = \eta^0_5$					**0,960538**	0,926984	0,885380	
ζ^0_5							— 0,511462	
$f^0_{5\varrho}$				— 0,198489	— 0,291952	— 0,377562	— 0,452838	
$N_\nu \eta^1_{5\nu}$				23,642755	23,052905	22,247671	2,656110	(6,694777)
η^1_5				0,985115		0,926986	0,885370	
ζ^1_5				— 0,201488		— 0,407302	— 0,511463	
$f^1_{5\varrho}$				— 0,198489		— 0,377562	— 0,452834	
$\eta^2_5 = \eta^0_6$						**0,926986**	0,885370	0,836847

3. Fehlerabschätzung.

n	1	2	3	4	5
$x_{n-\frac{1}{2}}$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45
$384\,\eta$	385,446674	385,464677	381,627710	374,013911	362,815785
η	1,003767	1,003822	0,993822	0,973995	0,944833
ζ	0,050377	— 0,049618	— 0,150618	— 0,252601	— 0,355517
$f(x, \eta)$	0,050567	— 0,049808	— 0,149687	— 0,246032	— 0,335904
$\frac{d\eta}{dx}$	0,050562	— 0,049809	— 0,149685	— 0,246025	— 0,335893
$10^6\, w$	5	1	— 2	— 7	— 11
$10^6\, 3 \int_{x_{n-1}}^{x_n} w_n\, dx$	1,0	0,2	— 0,4	— 1,4	— 2,2
$10^6\, 3\, u$	1,0	1,2	0,8	— 0,6	— 2,8
$10^6\, u$	0,3	0,4	0 3	— 0,2	— 0,9

Schätzungsweise ist:
nach der letzten Zeile $|u| \leq 9 \cdot 10^{-7}$ für $0 \leq x \leq 0{,}5$

wegen $\left| \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]_{y=\eta} \right| = |0{,}2\,\eta - x| < 0{,}3 ; \left| \frac{f(x, y) - f(x, \eta)}{y - \eta} \right| < 0{,}3 = C ;$

daher nach 4, 14, $|y - \eta| < e^{C\,n\,h}$ fin sup $|u| = e^{0{,}15} \cdot 9 \cdot 10^{7}$, also $|y - \eta| < 10^{-6}\, 1{,}1$ für $0 \leq x \leq 0{,}5$.

KLEINE MITTEILUNGEN

Bestimmung des wirksamen Anstellwinkels eines Flügelprofils aus der Druckverteilung. Bei der Übertragung der an Tragflügelmodellen gewonnenen Versuchsergebnisse auf geänderte Spannweitenverhältnisse oder auf Verhältnisse bei anderen Verwendungszwecken z. B. in Propellern oder Turbinen, besteht das Bedürfnis, den wirksamen Anstellwinkel der untersuchten Profile beim jeweiligen Versuch zu kennen. Zwar liefert die Tragflügel-Theorie eine einfache Umrechnungsformel vom geometrischen Anstellwinkel auf den im Mittel wirksamen Anstellwinkel, wenigstens bei kleinem Auftrieb. Dieser ist aber im allgemeinen nicht ohne weiteres über die Spannweite konstant. Liegen jedoch Druckverteilungsmessungen z. B. in der Symmetrieebene des Tragflügels vor, so kann man aus diesen, solange die Strömung nicht abgerissen ist, auf den wirksamen Anstellwinkel schließen. Außerhalb der Grenzschicht herrscht Potentialströmung. Der beim Übergang nach der Grenzschicht vorhandene Druck setzt sich bis zum Profile selbst fort. Aus der Druckverteilung kann man also nach der Bernoullischen Gleichung eine Geschwindigkeitsverteilung berechnen, die zwar nur außerhalb der Grenzschicht vorhanden ist, die man jedoch einem Vergleich mit der Potentialströmung um ein dem wirklichen Profil äquivalentes Profil in idealer Strömung zugrunde legen kann. An diesem Profil ließe sich nun der Potentialverlauf auf der Berandung, die mit der des wirklichen Profils von Punkt zu Punkt angenähert gleiche Bogenlänge besitzen möge, berechnen und damit die Potentialdifferenz $D\varphi$ zwischen vorderem und hinterem Verzweigungspunkt auf der Druckseite $D\varphi_d$ und auf der Saugseite $D\varphi_s$ bestimmen. Wie man z. B. aus der Strömung um den Bildkreis eines Profils leicht ableiten kann, ist, wenn δ den auf die neutrale Achse des Profils bezogenen wirksamen Anstellwinkel bedeutet:

$$\frac{\Delta\varphi_d}{\Delta\varphi_s} = \frac{\cos\delta - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta}{\cos\delta + \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)\sin\delta} = q .$$

Dieser Quotient, der nach obigem aus der gemessenen Druckverteilung zu bestimmen ist, ist also nur vom wirksamen Anstellwinkel abhängig. Diese Abhängigkeit ist durch die Abbildung 1 veranschaulicht.

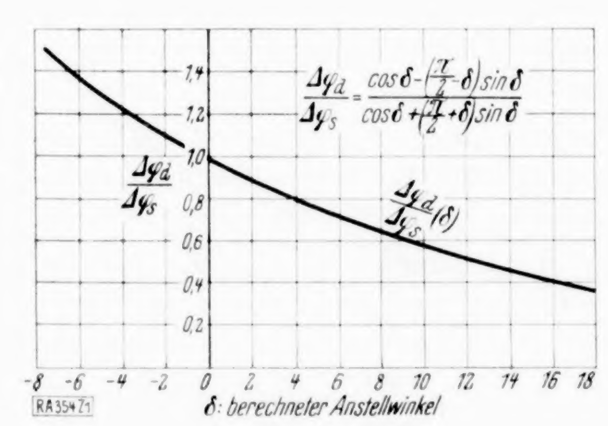


Abb. 1.

Liegen Druckverteilungsmessungen bei mehreren Anstellungen α, bezogen auf die Profilsehne, vor, so kann man q (α) bestimmen. Ist für $\alpha = -\beta$, $q = 1$, so ist der wirksame Anstellwinkel, bezogen auf die Profilsehne,

$$\alpha' = \delta + \beta .$$

Eine auf meine Anregung hier von Herrn Hußmann vorgenommene Auswertung[1]) der Göttinger Versuchsergebnisse am Profil Göttingen 387 $\left(\frac{t}{b} = \frac{1}{5}\right)$ ergab gute Übereinstimmung von α' mit den Resultaten der Prandtlschen Tragflügeltheorie

$$\left(\alpha' = \alpha - \frac{\zeta_a}{\pi} \cdot \frac{t}{b}\right)$$

bei kleinen Anstellwinkeln. Bei größeren Anstellwinkeln war jedoch eine Abweichung von etwa der 4. Potenz des Auftriebsbeiwertes festzustellen, welche offenbar durch die Verminderung des Auftriebs gegenüber dem theoretischen infolge Verlagerung des Totwassergebiets nach der Saugseite bedingt ist.

$$\left(\alpha' = \alpha - \frac{\zeta_a}{\pi} \cdot \frac{t}{b} - \frac{1}{57} \cdot \zeta_a^4\right).$$

M. E. dürften ähnliche Korrekturen auch für andere Profile, die an unverwundenen Modellen gleichen Spannweiten-Verhältnisses $\frac{t}{b} = \frac{1}{5}$ und rechteckigem Grundriß untersucht wurden, gültig sein.

Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.

F. Weinig. 354

Kleine Änderungen des Kerns einer symmetrischen, homogenen, linearen Integralgleichung. In einer früheren Arbeit[2]) wurde der Einfluß kleiner Änderungen in der einem Eigenwertproblem zugehörigen Differentialgleichung untersucht und darauf ein Näherungsverfahren aufgebaut. Man stieß bei der Untersuchung auf gewisse inhomogene Differentialgleichungen, deren Lösung in der dem jeweiligen Problem angepaßten Form gefunden wurde. Doch ließ sich diese Lösung auch dadurch finden, daß man als Ansatz eine Reihe der Eigenfunktionen des homogenen Problems ansetzt, deren Koeffizienten leicht bestimmt werden können. Dies wurde vor Abfassung der genannten Arbeit auch versucht, jedoch nicht veröffentlicht, da dieser Weg für manche praktische Schwingungsprobleme nicht zweckmäßig ist. Diesen Weg findet man in der neuen Auflage von Courants-Hilbert: „Methoden der mathematischen Physik“, angegeben.

Will man aber von der das Eigenwertproblem darstellenden Integralgleichung ausgehen, indem der Einfluß einer Änderung des Kernes betrachtet wird, so stößt man wiederum im Laufe der Entwicklungen auf eine inhomogene Integralgleichung, deren Lösung durch die Schmidtsche Reihe dargestellt wird. Da sich hier also die Reihenentwicklung nicht vermeiden läßt, so ist für praktische Zwecke das Problem etwas anders — einschränkender — zu formulieren:

Gegeben sei die homogene, lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$u(s) - \lambda \cdot \int_a^b K(s,t) \cdot u(t) \cdot dt = 0 \quad . \quad . \quad (1).$$

---

[1]) Eine ausführliche Darlegung „Über die Abhängigkeit der Geschwindigkeits- und Druckverteilung an einem Tragflügelprofil vom Anstellwinkel“ ist 1933 S. 127 in Werft Reederei Hafen veröffentlicht, woher auch die Abbildung entnommen ist.

[2]) Annalen der Physik, 5. Folge, Band 8 (1931), S. 297 bis 352.

Der Kern enthalte einen Parameter σ, so daß Eigenwert und Eigenfunktionen auch von diesem abhängen. Für $\sigma = \sigma_0$ sei die Lösung von (1) bekannt, derart, daß mit $K(s, t, \sigma_0) = k_0$ das Orthogonalsystem $u_n(s, \sigma_0) = v_{n,0}$ der normierten Eigenfunktionen und die Eigenwerte $\lambda_n(\sigma_0) = \lambda_{n,0}$ die Integralgleichung

$$v_{n,0}(s) - \lambda_{n,0} \int k_0(s,t) \cdot v_{n,0}(t)\, dt = 0 \;\text{[2]} \quad \text{(1a)}$$

befriedigen. Nun läßt sich doch mit der Taylorschen Reihe — unter den üblichen Voraussetzungen — schreiben:

$$K(s, t, \sigma_0 + \alpha) = k_0 + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{\partial K}{\partial \sigma} + \dots$$
$$= k_0 + \alpha \cdot k_1 + \alpha^2 \cdot k_2 + \ldots \quad \text{(2a)},$$

$$u(s, \sigma_0 + \alpha) = v_0 + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \dots$$
$$= v_0 + \alpha \cdot v_1 + \alpha^2 \cdot v_2 + \ldots \quad \text{(2b)},$$

$$\lambda(\sigma_0 + \alpha) = \lambda_0 + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} + \dots$$
$$= \lambda_0 + \alpha \cdot \varepsilon_1 + \alpha^2 \cdot \varepsilon_2 + \ldots \quad \text{(2c)},$$

wobei die partiellen Ableitungen für $\sigma = \sigma_0$ gelten und in (2b) und (2c) der Index n hinzuzufügen wäre.

Dann stellen aber die Werte v_1 und ε_1, die uns wesentlich hier interessieren, nichts anderes dar als ein Maß dafür, ob λ bzw. $u(s)$ an der Stelle σ_0 zu- oder abnehmen wird. Bei genügend kleinem α ist dadurch auch der Betrag der Änderung von Eigenwert und Eigenfunktion bestimmt. Zur formalen Auswertung geht man mit (2) in (1) ein und findet durch Vergleich entsprechender Potenzen von α je eine inhomogene Integralgleichung. Für die erste Potenz wird:

$$v_{n,1}(s) - \lambda_{n,0} \cdot \int k_0(s,t) \cdot v_{n,1}(t) \cdot dt$$
$$= \frac{\varepsilon_{n,1}}{\lambda_{n,0}} \cdot v_{n,0}(s) + \lambda_{n,0} \int k_1(s,t) \cdot v_{n,0}(t)\, dt \quad \text{(3)},$$

woraus man vermöge der Forderung, daß die rechte Seite orthogonal zu $v_{n,0}$ sein muß, $\varepsilon_{n,1}$ und mit Hilfe der Schmidtschen Reihe $v_{n,1}$ findet:

$$\varepsilon_{n,1} = -\lambda_{n,0} \cdot \iint k_1(s,t) \cdot v_{n,0}(t) \cdot v_{n,0}(s) \cdot ds \cdot dt \quad \text{(4)},$$

$$v_{n,1} = \sum_{k=1,2,\dots}' {}_n c_{k,1} \cdot v_{k,0}(s) + \frac{\varepsilon_{n,1}}{\lambda_{n,0}} \cdot v_{n,0}(s)$$
$$+ \lambda_{n,0} \cdot \int k_1(s,t) \cdot v_{n,0}(t) \cdot dt \quad \ldots\ldots \quad \text{(5)};$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß $k \neq n$ und wo

$${}_n c_{k,1} =$$
$$\frac{(\lambda_{n,0})^2}{\lambda_{k,0} - \lambda_{n,0}} \cdot \iint k_1(s,t) \cdot v_{n,0}(t) \cdot v_{k,0}(s) \cdot dt \cdot ds \quad \text{(5a)}.$$

Bequem ist die Formel für $\varepsilon_{n,1}$, während, wie eingangs erwähnt, die für $v_{n,1}$ nicht immer, z. B. für die Feststellung der Änderung der Nullpunkte (Wanderung der Knoten) angenehm ist.

Ändert sich der Kern bei gleichbleibenden Randbedingungen, so kann man vielleicht ebensogut von der Differentialgleichung ausgehen, und die in der genannten Arbeit entwickelten Größen ε_i, v_i kann man dann auch deuten, wie in (2) angegeben. Übrigens muß dann das letzte Glied in (5) die Randbedingungen erfüllen.

Ändert sich aber der Kern durch veränderte Randbedingungen, so ist die Verwendung der Integralgleichung zweckmäßig, da diese ja jene einschließt.

Zur Verbeispielung sei der einfache und leicht nachprüfbare Fall der an einem Ende fest, an dem anderen Ende elastisch gelagerten Saite von der Länge 1 gewählt. Die Randbedingungen haben die Form $u(0) = 0$, $u(1) = -h \cdot u'(1)$, so daß der Kern die Gestalt hat:

$$K(s,t) = s \cdot (1 - t) + \alpha \cdot s \cdot t, \quad s \leq t,$$
$$= t \cdot (1 - s) + \alpha \cdot t \cdot s, \quad s \geq t, \text{ wo } \alpha = \frac{h}{1+h}.$$

Man erhält dann, da $k_1 = s\,t$ (k_2, k_3 ... verschwinden):

$$v_{n,0}(s) = \sqrt{2} \cdot \sin n\pi s, \quad \lambda_{n,0} = n^2 \pi^2,$$

$$\varepsilon_{n,1} = -2 \cdot \lambda_{n,0},$$

d. h. die Eigenwerte sinken, und zwar proportional dem Eigenwert des Ausgangsproblems der an beiden Enden fest gelagerten Saite. Für genügend kleine α hätte man

$$\lambda_n = \lambda_{n,0} \cdot \frac{1-h}{1+h}.$$

Der Wert $\varepsilon_{n,1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}$ mit $\frac{h}{1+h} = \sigma$ stimmt naturgemäß mit dem Wert überein, den man aus der genauen transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tang} \sqrt{\lambda_n} = -h \cdot \sqrt{\lambda_n}$$

für $h = 0$ erhält.

Daß der Eigenwert sinkt, konnte übrigens auch nach (4) aus dem W e y l schen Satz über die Addition zweier Kerne geschlossen werden. —

Ist beispielsweise aber ε_1 gleich null, so müßte noch ε_2 herangezogen werden, um den Verlauf $\lambda(\sigma)$ zu erkennen, möglicherweise auch noch ε_3, ... Da jedoch die Formeln, wie schon (5) erkennen ließ, umständlich werden, sei nur noch ε_2 angegeben:

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_1)^2}{\lambda_0} - (\lambda_0)^2 \cdot \iint k_1(s,t) \cdot v_1(t) \cdot v_0(s) \cdot dt \cdot ds$$
$$- (\lambda_0)^2 \cdot \iint k_2(s,t) \cdot v_0(t) \cdot v_0(s) \cdot dt \cdot ds.$$

(Index n fortgelassen.)

Bei besonderen Kernen werden die Formeln gelegentlich sehr einfach.

W. M e y e r z u r C a p e l l e n, Kobern (Mosel). 300

[2] Zur Vereinfachung sind die Grenzen des Integrals, die hier die gleichen bleiben, nicht weiter mitgeschleppt.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Prof. Dr. H. **KOSCHMIEDER,** Direktor des Staatl. Observatoriums Danzig. Dynamische Meteorologie. (Bd. 2 von Physik der Atmosphäre, Sammlung lehrbuchartiger Monographien aus dem Gebiet der Meteorologie hrsg. v. H. Koschmieder.) XII + 376 S. m. 137 Abb. u. 1 Tafel. Leipzig 1933, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis geb. 26 M.

Wir besitzen in der deutschen Literatur keinen Mangel an Darstellungen jener meteorologischen Untersuchungsmethoden, die man praktisch als „theoretische Meteorologie" zusammenfassen sollte. Die „Dynamische Meteorologie" wäre dann ein Teil dieser theoretischen Meteorologie, in der man sich im wesentlichen mit dynamischen Problemen befassen sollte. H. Koschmieder hat zu den vorhandenen Büchern und Zusammenfassungen ein neues hinzugefügt, das in der von ihm herausgegebenen Sammlung lehrbuchartiger Monographien aus dem Gebiete der Meteorologie sozusagen den theoretisch-mathematischen Untergrund zu bieten hat. In diesem Sinne gibt auch Koschmieder in klarer und leicht faßlicher Form alles, was man als Grundlage für das Verständnis theoretischer meteorologischer Arbeit bedarf. Er gibt einen Überblick über die ganze Statik der Atmosphäre, die wie üblich in Verbindung mit den Grundsätzen der Thermodynamik der Atmosphären gebracht wird, er behandelt die Kinematik, das Stromfeld und seine Eigenschaften und in Verbindung damit den kinematischen Aufbau hydrodynamischer Stromfelder mit speziellen Anwendungen der Aufwindtheorie; schließlich werden in einem 3. Teil, der die Aufschrift „Dynamik" trägt, die Differentialgleichungen der Luftbewegung, die elementaren Bewegungen mit und ohne Reibung, die Energiegleichungen und die Schwingungen der Atmosphären abgeleitet und besprochen.

Gegen das, was Koschmieder in seiner „Dynamischen Meteorologie" gibt und auch gegen die Art, wie dies gegeben wird, ist wenig einzuwenden, und das Buch kann allen, die in der Meteorologie sich eine gewisse Grundlage aneignen wollen, nur empfohlen werden. Was mir in dieser dynamischen Meteorologie abgeht, ist die Herausarbeitung der Problemstellung bei den einzelnen Fragen, über die meines Erachtens viel zu kurz hinweggegangen worden ist. Wenn Koschmieder im Vorwort sagt, daß „das Gewicht der Darstellung in der Statik auf der Zahl, in der Kinematik auf der Zeichnung, in der Dynamik auf der Formel" liegt, so möchte ich hinzufügen, daß in der dynamischen Meteorologie das Gewicht auf den dynamischen Problemen liegen sollte; in Koschmieders Buch sind zwar die Grundlagen für eine Behandlung dieser Probleme gegeben, aber über sie erfährt man recht wenig. Es fehlt am Schluß des Buches sozusagen noch ein nicht zu kurzes Kapitel, in dem die modernen Fragen der theoretischen Meteorologie behandelt sein sollten. Dann wäre die „dynamische Meteorologie" vollständig. Nach der Güte des ersten Teiles hätte man auch für den fehlenden Schluß eine gute und inhaltreiche Darstellung erhoffen dürfen.

Berlin. A. Defant. 369

V. **BJERKNES,** Prof. a. d. Univ. Oslo, Research Associate des Carnegie Institutes in Washington, J. **BJERKNES,** Prof. am Geophys. Institut Bergen, H. **SOLBERG,** Prof a. d. Univ. Oslo, T. **BERGERON,** wissenschaftl. Berater im norweg. Wetterdienst. Physikalische Hydrodynamik mit Anwendung auf die dynamische Meteorologie. XVII + 797 S. m. 151 Abb. Berlin 1933, Julius Springer Verlag. Preis geb. 69 M.

Die reine (klassische) Hydrodynamik setzt voraus, daß entweder die Flüssigkeit homogen und unzusammendrückbar sei oder daß bei Zusammendrückbarkeit die Dichte zeitlich und räumlich nur vom Drucke abhänge. Dieser klassischen Hydrodynamik, die keine Behandlung der Wechselwirkung zwischen Bewegung und Zu- und Abfuhr von Wärme durch Leitung und Strahlung zuläßt, setzt V. Bjerknes die „physikalische Hydrodynamik" gegenüber. In ihr finden die physikalischen Eigenschaften der wirklichen Flüssigkeiten und Gase so weit Berücksichtigung, daß die Temperatur als dritte gleichberechtigte Zustandsveränderliche neben Druck und Dichte (bzw. Volumen) eingeführt wird. Dadurch können auch thermodynamische Vorgänge als primäre Strömungsursachen erfaßt und von hier aus die großen hydrodynamisch-geophysikalischen und hydrodynamisch-kosmischen Probleme in Angriff genommen werden. Die Anwendung auf meteorologische Aufgaben zieht sich wie ein roter Faden bereits durch den theoretisch-hydrodynamischen Hauptteil des Buches. Im (erheblich kürzeren) zweiten Teil werden die wichtigsten meteorologischen und klimatologischen Erfahrungstatsachen unter Bezugnahme auf die vorangegangenen theoretischen Entwicklungen dargestellt.

Die beiden ersten Kapitel des Buches geben einen gedrängten, aber äußerst klaren Überblick über die Vektor- und Tensorrechnung sowie über die Kinematik der Kontinua, wobei sowohl Cartesische als auch ganz allgemeine Koordinaten Anwendung finden. Im dritten Kapitel werden die Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen für ideale und für reibende Flüssigkeiten in der sog. Lagrangeschen und in der Eulerschen Form aufgestellt und die Vor- und Nachteile der beiden Systeme vom mathematischen und vom physikalischen Standpunkt aus abgewogen. Im vierten Kapitel werden die allgemeinen Eigenschaften der hydrodynamischen Stromfelder untersucht. Dabei werden an Stelle der bekannten Erhaltungssätze der klassischen Hydrodynamik verallgemeinerte Sätze über Zirkulations- und Wirbelbildung abgeleitet. Daran anschließend wird das Massen- und Temperaturfeld im stationären zirkularen Wirbel untersucht und Entstehung und Bedeutung der Turbulenz großen Stils, die man in der Lufthülle und im Meere antrifft, behandelt. Die Besprechung des Einflusses der Reibung führt zu einer allgemeinen Untersuchung der Energieumwandlungen in einer „physikalischen" Flüssigkeit und zur Aufstellung thermodynamischer Sätze über die Arbeitsleistung bei Zirkulationsbewegungen.

Von besonderem Reiz sind das fünfte und sechste Kapitel, in denen auf die auffällige Analogie der hydrodynamischen Stromfelder mit den elektrostatischen und magnetischen Kraftfeldern hingewiesen wird. In allen 3 Feldern werden paarweise zusammengehörige Vektoren betrachtet, die sich dimensionsmäßig um einen Faktor unterscheiden, der eine Eigenschaft des stofflichen Trägers des Feldes darstellt: elektrische Verschiebung und Feldstärke, magnetische Induktion und Feldstärke, Geschwindigkeit und spezifische Bewegungsgröße. Werden der Geschwindigkeit die elektrische Verschiebung bzw. magnetische Induktion, der spez. Bewegungsgröße aber die Feldstärke zugeordnet, so gelangt man zu den hydrodynamischen Feldgleichungen für nichtstationäre Bewegung. Von den zahlreichen mete-

orologischen Anwendungen der Ergebnisse, die Verf. gibt, seien die Luftbewegung quer über einen Gebirgsrücken und das Zusammenfließen der Regentropfen besonders erwähnt. Vertauscht man die Zuordnung von Geschwindigkeit und spez. Bewegungsgröße, so daß statt des spez. Volumens die Dichte der Dielektrizitätskonstanten bzw. magnetischen Permeabilität entspricht, so gelangt man zu den hydrodynamischen Feldgleichungen der stationären Bewegung. Von ihnen aus ergeben sich anregende Ausblicke auf Tragflügeltheorie, Theorie des Ruderns und des Fluges der Vögel und Insekten.

Im siebenten bis elften Kapitel wird planmäßig und ganz allgemein eine Theorie der Wellenbewegungen entwickelt. Sie beginnt mit der Ableitung allgemeiner Störungsgleichungen für beliebig gegebene Bewegungen durch Linearisierung der hydrodynamischen Gleichungen. Dann werden Gleichungen der Gleichgewichtsstörung aufgestellt, deren Lösung sowohl die reinen Kompressionswellen (Schallwellen) als auch die reinen Schwerewellen umfaßt, und es wird untersucht, in welcher Weise sich die Wellenbewegungen verändern, wenn die aufeinanderlagernden Schichten verschiedene horizontale Translationsbewegungen haben und wie dabei „dynamische Instabilität“ auftreten kann. Schließlich werden die Schwingungen und Wellen in einem zirkularen Wirbel behandelt, in dem eine gegen die Wirbelachse gerichtete Anziehungskraft wirkt. Die bekannte, bisher nur für homogene und unzusammendrückbare Flüssigkeiten benutzte quasi-statische Methode, d. h. das Verfahren, die Bewegungsgleichung für die Vertikale durch die Gleichgewichtsgleichung zu ersetzen, wird auch für zusammendrückbare Schichten in indifferentem (adiabatischem) Gleichgewicht entwickelt. Dabei wird auf die Vorteile wie auf die inneren Schwächen dieser Methode hingewiesen und gezeigt, daß die Laplacesche Gezeitentheorie hinsichtlich der 24stündigen Gezeiten eine wesentliche Lücke enthält, die darauf zurückzuführen ist, daß in ihr die quasi-statische Methode über die Grenzen ihrer Gültigkeit hinaus, nämlich auf ein rotierendes System, angewendet wird.

Die Erkenntnis der Unzulänglichkeit der quasistatischen Methode ist für die Meteorologie von grundlegender Bedeutung. Im zwölften bis vierzehnten Kapitel wird daher die Wellenbewegung auf der rotierenden Erde nach der exakt dynamischen Methode behandelt. Das Endergebnis dieser Untersuchungen ist, daß man durch Integration der Störungsgleichungen für zwei in zonaler Bewegung befindliche isotherme Schichten auf der rotierenden Erde zu Wellentypen gelangt, die nicht bloß qualitativ, sondern in recht befriedigender Annäherung auch zahlenmäßig die wesentlichen Merkmale neugebildeter (junger) Zyklonen besitzen.

Mit einem Ausblick auf eine Fülle neuer Aufgaben, die noch der Lösung harren, schließt der von V. Bjerknes selbst mit wesentlicher Unterstützung von H. Stolberg verfaßte theoretische Teil des Buches. Er kann nach Ansicht des Referenten als ein Muster der Bearbeitung eines Teilgebietes der angewandten Mathematik bezeichnet werden: sowohl die Ausgangspunkte der Theorie als auch die Schlußergebnisse der Rechnungen stehen im Zusammenhang mit der Erfahrungswelt, und es werden unnötige, das Verständnis erschwerende Spitzfindigkeiten vermieden und doch ist überall Strenge der Schlußweise und Schärfe der Begriffe gewahrt. Bedauerlich ist nur, daß Bjerknes teilweise eine Terminologie gebraucht, die von der bei Mathematikern und Physikern sonst üblichen abweicht. So wird als Gradient der Fallvektor — $F\alpha$ bezeichnet, während der Gradient der Mathematiker und Physiker mit dem Namen Aszendent belegt wird. Da das Buch auf viele Jahre hinaus die Hydrodynamik für Meteorologen sein wird, würde die unselige Verschiedenheit des Begriffes „Gradient“ bei Mathematikern und Physikern einerseits und bei den Meteorologen andererseits mit einem Schlage beseitigt worden sein, wenn sich V. Bjerknes hätte dazu entschließen können, sich der Bezeichnungsweise der erstgenannten anzuschließen.

Der zweite, empirisch-meteorologische Teil des Buches, für dessen Inhalt J. Bjerknes, der Sohn von V. Bjerknes, und T. Bergeron verantwortlich sind, besteht aus 5 Kapiteln mit den Überschriften: der mittlere Zustand der Atmosphäre, der Wärmehaushalt der Atmosphäre, die permanenten Zirkulationssysteme, die Störungen der großen permanenten Zirkulationen, das Wetter. Dieser Teil bildet gewissermaßen ein kurzgefaßtes Lehrbuch der Meteorologie für Hydrodynamiker, das durch die mannigfachen Bezugnahmen auf den theoretischen ersten Teil besonders anziehend ist. In Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen wird die Entstehung und Entwicklung der den quasi-permanenten Zirkulationen überlagerten Störungen, der Zyklonen, als eine nicht-umkehrbare Umbildung einer Wellenstörung in einen großen Luftwirbel, der als solcher schließlich abstirbt, erklärt.

Den Schluß des Buches bildet eine Bibliographie mit geschichtlichen Erläuterungen, in der über die Entwicklung der Arbeiten der Bjerknesschen Schule berichtet wird.

Frankfurt a. M. Franz Baur. 359

F. HOPFNER, Chefastronom des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien, **Physikalische Geodäsie.** Bd. XIV d. Sammlg. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“. Leipzig 1933, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. XI + 434 S. m. 49 Fig. im Text. Preis geb. 31 M.

Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die mathematischen und theoretisch-physikalischen Grundlagen zur Beantwortung der Frage nach der Figur der Erde zusammenzustellen. Empirische Fragen, die das Problem betreffen und noch heute zu den umstrittenen Punkten der höheren Geodäsie zählen, werden nicht behandelt. In den ersten Kapiteln werden rein mathematische Grundlagen gegeben: Aus der Theorie der Kugel- und der Laméschen Funktionen, die Greenschen Integralsätze. Das vierte Kapitel bringt die wichtigsten Sätze aus der Potentialtheorie, ohne daß jeder von ihnen ausführlich bewiesen wird. Einen großen Raum nimmt die Behandlung der Gleichgewichtsfiguren ein, insbesondere werden die Ellipsoide von Mac Laurin und Jacobi eingehend untersucht. Weiterhin werden das berühmte Clairautsche Theorem und die hiermit zusammenhängenden Fragen besprochen. Abschließend wird die Arbeit von H. Bruns: Die Figur der Erde behandelt und ergänzt. Insgesamt ist das Buch nicht für jemanden geschrieben, der sich zum ersten Male mit dem Stoffe befassen will. Besonders zu begrüßen ist die Wiedergabe der älteren klassischen Arbeiten, da diese oft schwer zugänglich sind; Verf. hat sich meist eng an die Originalarbeiten gehalten. Bei der Behandlung der Gleichgewichtsfiguren hat sich der Verf. A. Véronnets Darstellung in P. Appells Traité de mécanique rationelle (4, Paris 1921) zum Vorbild genommen. Für manchen Nachweis aus der neueren, weit zerstreuten Literatur wird der Fachmann dem Verf. dankbar sein.

Potsdam. H. Schmehl. 360

Handbuch der Vermessungskunde von weil. Dr. phil. h. c. W. **JORDAN**, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Hannover, fortgesetzt von weil. Dr. C. **REINHERTZ**, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Hannover. Zweiter Band, Zweiter Halbband: Höhenmessungen, Tachymetrie, Photogrammetrie und Absteckungen. Mit zahlreichen Figuren und Abbildungen. 9., erw. Aufl., bearb. v. Dr. Dr.-Ing. e. h. O. **EGGERT**, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Berlin. Stuttgart 1933, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung. X + 597 S. Preis brosch. 25,25 M., geb. 28,25 M.

Wie der im Jahre 1931 erschienene erste Halbband des zweiten Bandes des Handbuches der Vermessungskunde ist auch der vor kurzem herausgekommene zweite Halbband von O. Eggert in den meisten Teilen von Grund auf neu bearbeitet worden. In diesem sind die Nivellierungen, die trigonometrischen und die barometrischen Höhenmessungen, die Tachymetrie, die Photogrammetrie, die Vorarbeiten für Eisenbahnbau usw. und eine Übersicht über die deutschen Landesvermessungen behandelt. Die in den letzten Jahren vollzogene schnelle Entwicklung und weitgehende Verbesserung der Meßinstrumente und der Meßverfahren, den gewaltigen Aufschwung der Photogrammetrie hat der Bearbeiter in der vorliegenden Neuauflage in einer Weise berücksichtigt, die abermals ein hervorragendes Zeugnis von seiner bekannten und stets bewundernswerten Geschicklichkeit ablegt, alle Neuerungen dem Leser in klarer, einfacher, dabei in einer sehr ansprechenden Form zugänglich zu machen. Die zahlreichen, recht deutlichen Abbildungen und Figuren erleichtern nicht nur die Lektüre, sondern sie vermitteln schon bei einem flüchtigen Durchblättern des Buches einen Einblick in die Vielgestaltigkeit der Instrumente, z. B. der Nivellierinstrumente, der Nivellierlatten, der Phototheodolite usw. In der neuen Bearbeitung ist in erster Linie der Abschnitt über Photogrammetrie hervorzuheben: in historischer Entwicklung wird der Landmesser und der Vermessungsingenieur mit all den für die Praxis wichtigen Verfahren und Meß- und Auswertungsgeräten ausführlich bekannt gemacht. Besonderes Interesse dürften auch für den Nichtfachmann die Ausführungen erwecken, die sich auf die neuzeitliche Photogrammetrie aus der Luft beziehen; das gleiche trifft für die Darstellung der schwierigen Vermessungsarbeiten zu, die z. B. bei ausgedehnteren Tunnelabsteckungen auftreten. Den Abschluß bildet eine bis zur Jetztzeit reichende geschichtliche Übersicht über die deutschen Landesvermessungen. Eine Reihe praktischer Gebrauchs- und Rechentafeln sind in einem Anhang untergebracht. Für Studierende und für Fachleute ist die von O. Eggert besorgte neunte Auflage des gesamten zweiten Bandes des Handbuches der Vermessungskunde ein erstklassiges Werk.

Potsdam. H. Schmehl. 372

•

ENRICO **PISTOLESI**, Professore nella R. Scuola di Ingegneria di Pisa. Aerodinamica. Biblioteca dell'Ingegnere. Dir. dal Prof. Ing. G. Albenga. Science Propedeutiche Bd. I. Turin 1932, Unione Tipografico-Editrice Torinese. XVI + 573 S. m. 294 Abb.

Unter dem Titel „Aerodinamica“ wird hier ein ausgezeichneter und sehr vollständiger Abriß der technischen Hydromechanik, unter besonderer Betonung der für die Flugtechnik wichtigen Fragen, gegeben. Nach einer allgemeinen Einleitung über die Theorie der idealen Flüssigkeiten, einschließlich der Helmholtzschen Wirbelsätze und der Theorie der wirbelfreien Bewegungen, folgt ein ausführliches Kapitel über die Auftriebskräfte des Tragflügels sowohl von unendlicher wie von endlicher Breite. Die Fragen des hydraulischen Widerstandes werden in ihrer ganzen Vielseitigkeit erörtert, und schließlich wird ein **Abriß der** Propellertheorie gegeben. Die Darstellung ist klar und sorgfältig unter aufmerksamer Benutzung der vorhandenen Literatur geschrieben. Man kann den Verfasser zu dem wohlgelungenen Werk beglückwünschen wie auch den Herausgeber, der damit in vielversprechender Weise eine neue Lehrbüchersammlung für die theoretischen Ingenieurwissenschaften eröffnet hat.

H. **HAHN**, o. Prof. a. d. Universität Wien, Reelle Funktionen. I. Teil: Punktfunktionen. Bd. XIII, 1 d. Sammlg. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“. Leipzig 1932, Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H. XI + 410 S. Preis geb. 32 M.

Dr. S. **BOCHNER**, Dozent a. d. Univ. München, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Bd. XII d. Sammlg. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“. Leipzig 1932, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. VIII + 229 S. Preis geb. 16 M.

Zwei neue Bände der Sammlung mathematischer Monographien, die, ursprünglich von Hilb begründet, jetzt von Artin und Kowalewski herausgegeben wird, beschäftigen sich mit zwei modernen Gebieten der Analysis. Hans Hahn gibt eine durchgreifend veränderte Neubearbeitung des ersten Teiles seiner 1921 in anderem Verlag erschienenen Theorie der reellen Funktionen. Sie enthält in überaus konziser, knapper Darstellungsform die Grundbegriffe der Mengenlehre und ihrer Anwendung auf die Definition reeller Funktionen. Mehr Interesse vom Standpunkt des „angewandten Mathematikers“ werden die Bochnerschen Vorlesungen über Fouriersche Integrale finden. Es gab bisher noch keine lehrbuchmäßige Zusammenfassung der hierher gehörigen Sätze. Wenn auch in diesem Werk gleichfalls das rein mathematische Interesse im Vordergrund steht, wird man mancherlei für die Anwendungen daraus entnehmen können.

Dr. OSKAR **PERRON**, o. ö. Prof. d. Mathematik a. d. Universität München, Algebra. II.: Theorie der algebraischen Gleichungen. 2., verb. Aufl. (Bd. 9 Göschens Lehrbücherei. I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik.) VIII + 261 S. m. 5 Fig. 1933. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig. Preis geb. 9,50 M.

Der zweite Band des hier schon angekündigten Perronschen Werkes [1]) bringt nach einigen Bemerkungen über die numerische Auflösung von Gleichungen eine systematische Einführung in die Galoissche Gleichungstheorie. Der Text ist mit größter Sorgfalt und in dem Bestreben klarer Verständlichkeit geschrieben.

Dr. KYRILL **POPOFF**, o. Prof. a. d. Univ. Sofia, Das Hauptproblem der äußeren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. Bd. XI d. Sammlg. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“. Leipzig 1932, Akadem. Verlagsgesellsch. m. b. H. XI + 214 S. m. 9 Textfig. Preis geb. 18 M.

Der Verfasser hat sich seit langem die analytische Behandlung des Hauptproblems der äußeren Ballistik zur besonderen Aufgabe gemacht. Auf

[1]) Bd. 12 (1932), S. 386.

diesem Gebiete sind im Laufe des letzten Jahrhunderts zahlreiche Methoden der Berechnung von Flugbahnen von seiten der praktischen Ballistiker entwickelt worden, während die theoretische Untersuchung der maßgebenden Differentialgleichungen seit Euler kaum Fortschritte aufzuweisen hatte. Mit großem Erfolg hat Popoff es unternommen, die inzwischen entwickelte Integrationstheorie der Differentialgleichungen, wie sie hauptsächlich auf den Gedanken von H. Poincaré beruht, für die Fragestellungen der Ballistik nutzbar zu machen. Wenn er jetzt seine früheren Abhandlungen, von denen eine auch in dieser Zeitschrift erschienen ist, in einem Buch zusammenfaßt und ergänzt, so wird man ihm hierfür Dank wissen. Der Hauptgedanke der neuen Lösungsmethode ist der, eine Funktion des Abgangswinkels als Parameter der Differentialgleichung aufzufassen und die Lösung — für ein beliebiges Widerstandsgesetz — auf Grund der Poincaréschen Sätze nach Potenzen dieses Parameters zu entwickeln. Man erhält so einerseits theoretisch vernünftige Lösungen und findet andererseits deren Beziehungen zu manchen der in der Praxis üblichen Ansätze. Auch auf das erweiterte Problem der Geschoßbewegung in der Atmosphäre mit veränderlicher Dichte finden die neuen Gesichtspunkte erfolgreiche Anwendung.

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Hrsg. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". 2. Bd. Heft 1: O. **VEBLEN**, Projektive Relativitätstheorie. V + 73 S. m. 3 Fig. Preis brosch. 8 M. Heft 2: TIBOR **RADO**, On the Problem of Plateau. 109 S. m. 1 Abb. Preis brosch. 12,80 M. Berlin 1933, Julius Springer Verlag.

Von den beiden ersten Heften des zweiten Bandes behandelt das erstere einen aus dem Interessengebiete der allgemeinen Relativitätstheorie entwickelten Fragenkreis. Das zweite beschäftigt sich vom Standpunkt der modernen Analysis aus mit dem klassischen Problem der Flächen kleinsten Ausmaßes, an dem sich seit jeher die Kraft der Analysis, namentlich die Tragweite der Sätze der Variationsrechnung, zu messen pflegte.

Mises. 370

H. A. **DAYNES**, D. Sc., F. Inst. P., Gas Analysis by Measurement of Thermal Conductivity. Cambridge University Press 1933. VIII + 357 S. m. 76 Abb. Preis 16/— sh.

Neben der Darstellung der chemischen Gasanalyse enthält das Buch die Behandlung physikalischer Hilfsmittel, wobei auch insbesondere die Hitzdrahtmessungen mit Anwendung mathemathischer Mittel diskutiert werden.

Molekülstruktur. Leipziger Vorträge 1931. Herausgeg. von Prof. Dr. P. **DEBYE**, Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Leipzig. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1931. VIII + 197 S. mit 44 Fig. u. 5 Tafeln. Preis kart. 10 M.

Die hier zusammengestellten Vorträge verschiedener Autoren behandeln Probleme der freien Drehbarkeit in Verbindungen, der Bandenspektroskopie, des Ramaneffekts und der Prädissoziation. Sie geben auch dem Fernerstehenden einen Einblick in die Versuche, die aus der Atomtheorie gewonnenen Erkenntnisse auf die komplizierteren Verhältnisse des Molekülbaus zu übertragen.

J. **REZELMAN**, Ingénieur en Chef aux Ateliers de Constructions Electriques de Charleroi Les machines électriques et la prédétermination de leur puissance spécifique maximum. Kommissionsverlag B. G. Teubner in Leipzig u. Berlin. 58 S. m. 16 Fig. Preis geh. 2 M.

Ohne eigentliche theoretische Begründung wird hier an numerischen Einzelbeispielen die Methode der Leistungsberechnung elektrischer Maschinen entwickelt. Das Buch kann daher für Elektroingenieure als Anleitung zu solchen Berechnungen von Wert sein.

Dr. EMIL **WARBURG** †, Prof. a. d. Univ. Berlin, Präsident der Physik.-Techn. Reichsanstalt a. D., Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. 23. u. 24. verb. Aufl. Bearb. v. Prof. Dr. G. HERTZ, Techn. Hochschule Berlin. XX + 484 S. m. 453 Abb. Dresden 1933, Theodor Steinkopff. Preis geb. 12 M.

Das beliebte Lehrbuch ist schon in der vorigen Auflage einer gründlichen, den modernen Bedürfnissen entsprechenden Umarbeitung unterzogen worden. Die neueste Auflage bringt einige weitere Verbesserungen und Ergänzungen.

P. A. M. **DIRAC**, Fellow of St.-John's College, Cambridge, Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduit par Al. Proca, Licencié ès Sciences, et J. Ullmo, Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Recueil des conférences-rapports de documentation. Vol. 21. Les Presses universitaires de France. 49, Boulevard Saint Michel, Paris 1931. VIII + 314 S.

Das bereits in deutscher Übersetzung vorliegende Buch des erfolgreichen Mitbegründers der Quantenmechanik erscheint hier auch in französischer Bearbeitung. Entsprechend dem eigenen Anteil des Verfassers an der Entwicklung steht im Mittelpunkt der Darstellung neben der gruppentheoretischen Symbolik die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung der Gleichungen, der Begriff der „Observabeln" und die relativistische Theorie des Elektrons.

Breslau. F. Noether.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sowie ihrer Umkehrfunktionen im Komplexen. Berechnet und erläutert von Robert HAWELKA, Assistent an der Dtsch. Techn. Hochschule in Brünn. Im Auftrag des Elektrotechn. Vereins E. V. in Berlin herausgegeben von Fritz EMDE, Dr.-Ing. e. h., Dr. techn. e. h., o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Stuttgart. Braunschweig 1931, Friedr. Vieweg & Sohn. 109 S. Preis im Inland 9 M, im Ausland 10 M.

KARL **OLTAY**, o. ö. Prof. d. Techn. Hochschule, K. Mitglied der Ung. Akademie der Wissenschaften, Relative Schwerkraftmessungen zwischen Budapest und Wien. Mitt. des Ung. Geod. Instituts, III. Ausgabe des Ung. Geod. Instituts. Budapest 1932. 53 S. m. 6 Fig. u. 20 Tafeln.

H. W. **BRUNS**, Über den Ursprung der Tatsache, die dem großen Fermatschen Theorem zugrunde liegt. Basel 1933, B. Wepf & Co. Verlag. 16 S. Preis brosch 2 Schw. Fr.

Dr.-Ing. FRITZ **HEUMANN**, Jena, Verhalten keramischer Werkstoffe bei Zugdruck-Dauerbeanspruchung. 42 S. m. 40 Abb. u. 4 Zahlentafeln. Berlin 1933, VDI-Verlag. Preis kart. 4,50 M (VDI-Mitglieder 4,05 M).

Dr.-Ing. H. **OSCHATZ,** Gesetzmäßigkeiten des Dauerbruches und Wege zur Steigerung der Dauerhaltbarkeit. Heft 2 der „Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt a. d. Techn. Hochsch. Darmstadt“.) IV + 64 S. m. 75 Abb. u. 9 Zahlentaf. Berlin 1933. VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5,60 M.

Prof. Dr. MAX **PLANCK,** Wege zur physikalischen Erkenntnis. Reden und Vorträge. Leipzig 1933, S. Hirzel Verlag. IX + 280 S. Preis geb. 8 M.

Inż. H. **CZOPOWSKI,** Prof. Politechniki Warszawskiej. Statyka Analityczna. Dla Studjujacych Nauki Inżynieryjne i Fizyczne. Jako Tom V-Ty „Mechaniki Teoretycznej“ Tegoż Autora. Warschau 1933. IX + 200 S. m. Abb. (poln.).

Dr.-Ing. WILHELM **STIEBER,** Das Schwimmlager. Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers. VII + 106 S. m. 12 Zahlent. u. 42 Abb. Berlin 1933. VDI-Verlag. Preis 6 M. VDI-Mitgl. 5,50 M.

Dr. W. **LIETZMANN,** Oberstudiendirektor in Göttingen, und Dr. J. **JAROSCH,** Direktor der Bundesrealschule in Wien XIII. Geometrie. Sphärische Trigonometrie und Analytische Geometrie der Ebene für die 7. u. 8. Kl. der Realschulen. 2. Aufl. Aus d. Sammlg. „Mathemat. Unterrichtswerk für Mittelschulen“ von W. Lietzmann und J. Jarosch. 112 S. m. 35 Fig. Wien 1933. Franz Deuticke. Preis kart. 3,35 M.

Studienrat KARL **PILIZOTTI,** Direktor des Bundesrealgymnasiums in Wien XVII. Lösungen zu den Aufgaben der Analytischen Geometrie der Ebene. 35 S. m. 25 Fig. Wien 1933, Franz Deuticke. Preis geh. 1,60 M.

Berichte aus dem Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Technischen Hochschule Stuttgart. Heft 2. 78 S. m. 96 Abb. Stuttgart 1933. Verlag von Konrad Wittwer. Preis geh. 7,50 M.

Dr. JOHANNES **TROPFKE,** Oberstudiendirektor an der Kirschner-Schule zu Berlin. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. 2. Bd.: Allgemeine Arithmetik. 3., verb. u. verm. Aufl. IV + 266 S. Berlin u. Leipzig 1933. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 13,20 M.

Dr.-Ing. G. **SCHARRER,** Nürnberg-Stuttgart, u. Dr.-Ing. OTTO **BRÖTZ,** Hannover. Gebäudeschwingungen. Forschungsheft 359. Berlin 1933, VDI-Verlag. 24 S. m. 45 Abb. u. 6 Zahlentaf. Preis 5 M, f. Mitgl. d. VDI 4,50 M.

R. L. **MOORE,** Professor of Pure Mathematics University of Texas. Foundations of Point Set Theory. (American Mathematical Society Coloquium Publications, Vol. XIII.) New York 1932. American Mathematical Society. VII + 486 S. Preis 5 $.

JOSEPH **FELS RITT,** Professor of Mathematics Columbia University. Differential Equations from the Algebraic Standpoint. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XIV.) New York 1932. American Mathematical Society. X + 172 S. Preis geb. 2,50 $.

Dipl.-Ing. **LENZ,** Oberreg.-Rat u. Mitgl. d. Reichspatentamtes. Die Rechen- und Buchungsmaschinen. 3. Aufl. VI + 122 S. m. 58 Abb. im Text. Leipzig u. Berlin 1932, Verlag von B. G. Teubner.

Dr.-Ing. H. **KIEKEBUSCH,** Charlottenburg. Die Werkzeugmaschine unter Last. Formänderungen und Beanspruchungen der Drehbank unter Betriebslast. Forschungsheft 360. 32 S. m. 100 Abb. u. 3 Zahlentaf. Berlin 1933, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 5 M.

FEDERIGO **ENRIQUES,** col concorso di diversi collaboratori. Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Libro X. 335 S. Bologna 1932, Nicolo Zanichelli.

J. **NIKURADSE,** Göttingen. Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Forschungsheft 361. Berlin 1933. VDI-Verlag G. m. b. H. 21 S. m. 21 Abb. u. 13 Zahlentafeln.

Dr.-Ing. WERNER **VOGEL,** Eingriffsgesetze und analytische Berechnungsgrundlagen des zylindrischen Schneckentriebes mit geradflankigem Schnecken-Achsenschnitt. Berlin 1933. Kommission VDI-Buchhandlung. 62 S. m. 52 Abb. im Text. Preis kart. 3,60 M.

Dr. phil. Dr.-Ing. AUG. **FÖPPL †,** Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Geh. Hofrat, Vorlesungen über Technische Mechanik. Vierter Band. Dynamik. 8. Aufl. Bearb. v. Dr.-Ing. A. BUSEMANN-Dresden, o. Prof. Dr. Ludw. FÖPPL-München und a. o. Prof. Dr.-Ing. O. FÖPPL-Braunschweig. VIII + 448 S. m. 114 Fig. im Text. Leipzig und Berlin 1933, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 14 M.

FELIX **KLEIN,** Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, gehalten a. d. Univ. Göttingen im WS. 1893/94. Ausgearbeitet von Ernst RITTER, herausgeg. u. m. Anm. versehen von Otto HAUPT, Prof. d. Math. a. d. Univ. Erlangen. (Bd. 39 d. „Grundlehren der mathemat. Wissenschaften“, herausgeg. v. R. Courant.) IX + 344 S. m. 96 Fig. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geb. 23,60 M.

Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Hrsg. v. Institutsvorstand D. THOMA, Dr.-Ing. o. Prof. Heft 6. 60 S. m. 39 Abb. u. 1 Titelbild. München und Berlin 1933, Verlag von R. Oldenbourg. Preis geh. 4,20 M.

Dr. LUDWIG **HOPF,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen. Einführung in die Differentialgleichungen der Physik. Slg. Göschen Nr. 1070. Berlin und Leipzig 1933, Walter de Gruyter & Co. 138 S. m. 49 Abb. Preis geb. 1,62 M.

Dr. A. **SCHIEBEL †,** weil. o. ö. Prof. d. Dtsch. Techn. Hochschule zu Prag. Die Gleitlager (Längs- und Querlager). Berechnung und Konstruktion. Nach dem Tode des Verfassers bearb. v. Dr.-Ing. K. Körner, o. ö. Prof. d. Dtsch. Techn. Hochschule zu Prag. (Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, hrsg. v. Prof. Dipl.-Ing. C. VOLK, Berlin. 8. Heft.) 70 S. m. 95 Abb. im Text und auf 29 Tafeln. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 7,50 M.

Dr. KARL **VOGTHERR,** Das Problem der Gleichzeitigkeit. 194 S. m. einer Tafel. München 1933, Verlag von Ernst Reinhardt. Preis brosch. 5,50 M, Leinen 7,50 M.

Dr. EUGEN **SÄNGER,** Ass. a. d. Techn. Hochschule Wien. Raketen-Flugtechnik. 231 S. m. 92 Abb. u. 34 Zahlentafeln. München 1933, R. Oldenbourg. Preis geb. 9,80 M.

NACHRICHTEN

Franz Eisner †.

Mit dem jähen, am 16. Juni ds. Jrs. erfolgten Hinscheiden des Privatdozenten Dr.-Ing. Franz Eisner hat die Gesellschaft für Angewandte Mathematik ein Mitglied des Vorstandes und ihre Berliner Ortsgruppe einen der treusten Mitarbeiter verloren.

Franz Eisner wurde am 4. September 1895, als Sohn des Oberingenieurs Wilhelm Eisner in Berlin geboren. Nach Absolvierung eines humanistischen Gymnasiums bezog er Herbst 1913 die Berliner Technische Hochschule, Abteilung für Bauingenieurwesen. Im Herbst 1914 meldete er sich als Kriegsfreiwilliger, wurde jedoch krankheitshalber nicht angenommen; während des Krieges arbeitete er neben seinem Studium für die Flugzeugmeisterei. 1919 bestand Eisner das Diplom-Examen an der Berliner Technischen Hochschule, wurde dann Regierungsbauführer und erledigte 1923 die Regierungsbaumeisterprüfung. Im selben Jahre trat er seine Stellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin an, der er bis zu seinem Tode angehört hat. 1928 promovierte Eisner an der Berliner Technischen Hochschule und habilitierte sich im selben Jahre an der Fakultät für Bauwesen für das Fach „Hydromechanik“.

Seine wissenschaftliche Tätigkeit begann Eisner auf dem Gebiet der Statik der Eisenkonstruktion; zunächst interessierte er sich hier für Anwendungen der Nomographie. Allmählich überwog die Vorliebe für die Hydrodynamik, die ihren ersten bedeutsamen Ausdruck in der Arbeit „Druckmessungen an umströmten Zylindern“ fand. Große Verdienste hat sich Eisner durch die Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik auf das Wasserbauversuchswesen erworben. 1929 erschien seine Dissertation als Monographie unter dem Titel „Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern vom Kreis- und Brückenpfeilerquerschnitt“. Daneben entfaltete er seit 1919 eine umfangreiche literarische Tätigkeit als Berichterstatter und Bearbeiter von Handbüchern.

Eisners große Literaturkenntnis, scharfe kritische Gabe und Objektivität prädestinierten ihn für die Abfassung großer zusammenfassender Berichte, von denen das Referat auf dem III. Internationalen Kongreß für Mechanik in Stockholm über „Das Widerstandsproblem“ und auf der Konferenz für Schiffsantrieb, Hamburg 1932 über den „Reibungswiderstand“ besonders hervorgehoben seien. Sein Lieblingswerk war aber der umfangreiche Beitrag „Offene Gerinne“ im Handbuch der Experimental-Physik (1932), der für das Versuchswesen im Wasserbau von grundlegender Bedeutung ist und ihm die allgemeine Anerkennung des In- und Auslandes eingetragen hat. Als letzte größere Arbeit ist die Mitteilung „Überfallversuche in verschiedener Modellgröße“ zu nennen.

Eisner war der geborene Lehrer und hatte als solcher in seiner Hochschultätigkeit, welche ihm viel Freude bereitete, große Erfolge; die Resonanz seiner Zuhörerschaft war für ihn fast Lebensbedingung.

Seine wissenschaftliche Arbeit und Lehrtätigkeit erfüllte sein Leben vollkommen, aber verzehrte es auch. Ein schweres Leiden beschattete sein Dasein. Es war für den Näherstehenden ein erschütterndes Bild, zu sehen, unter welchen Mühen seine formvollendeten Arbeiten, die so gar keine Spuren der Anstrengung bei der Abfassung verrieten, entstanden. Als starke seelische Erschütterungen — Gründe zu materieller Besorgnis lagen nicht vor — an ihn herantraten, fühlte er sich ihnen nicht mehr gewachsen und schied nach vorhergegangenen schweren Kämpfen freiwillig ohne Bitterkeit aus dem Leben. Die aber, die ihn näher kannten und wußten, wie schwer sein Wandel auf dieser Erde war, rufen ihm doppelt herzlich das „Sit tibi terra levis“ nach.

Berlin. Georg Weinblum. 378

Gesellschaft für angewandte Mathematik u. Mechanik.

Hauptversammlung.

Der Deutsche Mathematiker- und Physiker-Tag, in dessen Rahmen die Hauptversammlung der Gesellschaft stattfindet, ist aus den schon in Heft 3 angedeuteten Gründen nach Würzburg verlegt worden. **Die angekündigte Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften fällt aus.**

Die Sitzungen umfassen die Zeit vom 17. bis 22. Sept.

Das genaue Programm und die Zeiteinteilung der Vorträge wird den Mitgliedern noch zugehen. Bisher sind bei unserer Gesellschaft die folgenden Vorträge angemeldet worden:

W. Barth, Völklingen (Saar): Die Bewegung von Staubteilchen in Kreiselrädern bei Förderung staubführender Medien.

R. Beyer, Zwickau (Sa.): Winkelbeschleunigungspläne der ebenen Kinematik und ihre Anwendung.

W. Flügge, Göttingen: Schwingungen zylindrischer Schalen.

H. Fromm, Spandau b. Bln.: Zur Theorie der zähplastischen Stoffe.

H. Gebelein, Göttingen: Die Bedingungen, unter denen statistische Prozesse zu universellen Verteilungsgesetzen führen.

R. Hermann, Aachen: Turbulenzentstehung beim Wärmeübergang durch freie Strömung an senkrechter Platte und waagerechtem Zylinder.

Karl Klotter, Karlsruhe: Graphische Darstellung zugeordneter Spannungs- und Verzerrungszustände.

R. Köhler-A. Ramspeck, Göttingen: Übertragung von Maschinenschwingungen auf Boden und Gebäude.

H. König, Clausthal: Praktische Ermittlung von Oberflächen.

Konrad Ludwig, Hannover: Berechnung zylindrischer Schalen bei speziellen Randbedingungen.

Heinz Neuber, München: Elastisch-strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern.

W. Schmeidler, Breslau: Mathematische Theorie des Schwingenfluges.

M. J. O. Strutt, Eindhoven (Holland): Beugung einer ebenen Welle an einer elliptischen Öffnung in einem ebenen Schirm. — Berechnung der Impedanz von Antennen unter dem Einfluß der Erde.

M. Schuler, Göttingen: Umschlag von Oberflächenwellen.

G. Vogelpohl, Berlin: Die Ermittlung der Rohreinlaufströmung aus den Navier-Stokesschen Gleichungen.

G. Weinblum, Berlin: Die analytische Entwicklung von Schnelldampferformen.

E. Weinel, Karlsruhe: Zur Tragflügeltheorie der räumlichen Turbinenströmung.

F. Weinig, Berlin: Berechnung achsialer Turbinenräder durch Streckenprofilgitter.

W. Zeller, Berlin: Federungsfragen bei Fahrzeugen im Hinblick auf die Fahrbequemlichkeit.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. —
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.